

3 Matriks

BAB

Standar Kompetensi:

3. Menggunakan konsep matriks, vektor, dan transformasi dalam pemecahan masalah

Kompetensi Dasar:

- 3.1 Menggunakan sifat-sifat dan operasi matriks untuk menunjukkan bahwa suatu matriks persegi merupakan invers dari matriks persegi lain
 3.2 Menentukan determinan dan invers matriks 2×2
 3.3 Menggunakan determinan dan invers dalam penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel

3.1 MENGGUNAKAN SIFAT SIFAT DAN OPERASI MATRIKS

Setelah mempelajari Pokok Bahasan ini, diharapkan anda dapat:

- Menentukan ordo suatu matriks
- Menyebutkan macam-macam matriks
- Menentukan transpose suatu matriks
- Menggunakan sifat kesamaan dua matriks

A. Pendahuluan

A.1. Pengertian Matriks

Di sebuah koperasi sekolah tercatat penjualan pinsil dan buku selama minggu pertama bulan Agustus sebagai berikut, hari Senin terjual pinsil 5 buah, buku 7 buah, Selasa buku terjual 10 buah, pinsil terjual 2 buah, hari Rabu buku terjual 5 buah, pinsil 6 buah, hari Kamis buku terjual 20 buah, pinsil 10 buah, hari Jum'at buku terjual 2 buah, pinsil 7 buah dan hari Sabtu buku terjual 5 buah, pinsil 4 buah.

Jika data penjualan tersebut ditulis dalam bentuk suatu daftar, bentuknya menjadi :

	Senin	Selasa	Rabu	Kamis	Jum'at	Sabtu
Buku	7	10	5	20	2	5
Pinsil	5	2	6	10	7	4

Bukan saja penulisannya menjadi lebih ringkas melainkan juga mudah membacanya. Data tersebut jika ditulis antara kurung buka dan kurung tutup tanpa mencantumkan judul baris dan judul kolom seperti berikut

$$\begin{pmatrix} 7 & 10 & 5 & 20 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 6 & 10 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Penyusunan bilangan seperti itu dinamakan suatu matriks. Pada umumnya yang dimaksud dengan suatu *matriks* adalah sekumpulan bilangan yang disusun dalam bentuk persegipanjang yang terdiri atas baris-baris dan kolom-kolom.

A.2. Notasi dan ordo suatu Matriks

Suatu matriks diberi notasi dengan huruf kapital, sedang ukurannya (ordo) ditentukan oleh banyaknya baris dan banyaknya kolom. Perhatikan matriks berikut :

$$A_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Huruf kapital A menunjukkan notasi (lambang) untuk matriks tersebut, 3×4 menunjukkan bahwa matriks yang dimaksud mempunyai 3 baris dan 4 kolom. Unsur (elemen) baris ke-i dan kolom ke-j matriks A dilambangkan dengan a_{ij} . Untuk contoh matriks di atas $a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{24} = 7, a_{33} = 8, a_{34} = 10$

Secara Umum

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Contoh :

Diketahui matriks-matriks berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 3 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- tentukan ordo ke tiga matriks itu.
- tentukan elemen baris ke-2 matriks A dan B
- Tentukan nilai $a_{12}, a_{23}, a_{31}, b_{22}, b_{13}$

Jawab :

- Ordo matriks A : 3×3 ($A_{3 \times 3}$), matriks B : 2×3 ($B_{2 \times 3}$)
- elemen baris ke-2 matriks A : 3, 6, 8 elemen baris ke-2 matriks B : 1, 3, 5
- $a_{12} = 9, a_{23} = 8, a_{31} = 1, b_{22} = 3, b_{13} = 8,$

A. 3. Macam-macam matriks

- Matriks Baris*

Matriks baris adalah matrik yang berordo $1 \times n$, terdiri atas satu baris dan n kolom dimana $n > 1$ disebut juga vektor baris.

Contoh:

$$K_{1 \times 4} = [3 \ -5 \ 6 \ 1]$$

- Matriks Kolom*

Matriks kolom adalah matriks yang berordo $m \times 1$, terdiri atas satu kolom dan m baris dimana $m > 1$ disebut juga vektor kolom

$$\text{Contoh: } L_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

- Matriks Persegi*

Matriks persegi adalah matriks yang banyak baris sama dengan banyaknya kolom, matriks persegi berordo $n \times n$ sering disebut sebagai matriks persegi berordo n

Diagonal utama matriks persegi adalah tempat kedudukan elemen-elemen matriks yang indeks barisnya sama dengan indeks kolom. Diagonal utama matriks A_n adalah $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$

Contoh :

$$C_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 8 \\ 2 & 6 & 7 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad D_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagonal utama

d. *Matriks Identitas*

Matriks identitas adalah matriks diagonal yang semua elemen diagonal utamanya adalah 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e. *Matriks Nol*

Matriks nol adalah matriks yang semua unsurnya adalah nol (biasa dinotasikan dengan huruf O)

Contoh :

$$O_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad O_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad O_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A.4. Transpose Suatu Matriks

Transpose dari matriks A, adalah matriks yang elemen-elemennya diperoleh dari elemen matriks A dengan mengubah setiap kolom matriks A menjadi baris atau sebaliknya. Transpose dari matriks A ditulis A^t .

Jika $A_{m \times n}$, maka $A^t_{(n \times m)}$

Contoh:

Tentukan A^t , B^t dan dari matriks berikut

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & 10 & 9 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$A^t = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 10 & -6 \\ 1 & 2 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

A.5. Kesamaan Dua Matriks

Dua matriks A dan B dikatakan sama ($A = B$) jika kedua matriks tersebut mempunyai ordo sama dan unsur-unsur yang seletaknya sama

$A_{m \times n} = [a_{ij}]$ $B_{m \times n} = [b_{ij}]$, Jika $A_{m \times n} = B_{m \times n}$, maka $[a_{ij}] = [b_{ij}]$

Contoh :

Tentukan nilai x dan y jika, $\begin{pmatrix} x & 4 \\ 2 & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$

Jawab :

$$\begin{pmatrix} x & 4 \\ 2 & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 3, \quad 3y = 9 \Rightarrow y = 3$$

Kegiatan 1

Transpose dan Kesamaan Dua Matriks

1. Diketahui matriks-matriks sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 13 & 0 \\ -5 & 1 & -7 & 6 \\ 8 & 7 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & -4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 10 \\ -5 & 3 & 8 \\ 18 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

- a. Sebutkan Ordo matriks A, B dan C
- b. Sebutkan unsur-unsur kolom ke-4 matriks B
- c. Sebutkan unsur-unsur baris ke-3 matriks A dan C
- d. Baris dan kolom keberapa 4 pada matriks A dan 7 pada matriks C
- e. Tentukan nilai-nilai $a_{13}, a_{34}, a_{42}, b_{23}, b_{14}, b_{21}, c_{31}, c_{42}, c_{12}$

2. Sebutkan jenis matriks berikut

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \\ 21 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Tentukan transpose dari matriks-matriks berikut

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 3 & 10 \\ 5 & -9 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Tentukan x, y dan z jika diketahui $A = B$!

$$\text{a. } A = \begin{pmatrix} z & x \\ 5 & 2y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x+y & 9 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{b. } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & x-y \\ 3 & z & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x+z & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

LATIHAN 1**Transpose dan Kesamaan Dua Matriks**

1. Diketahui matriks-matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 9 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- a. Sebutkan Ordo matriks A, B dan C!
- b. Sebutkan unsur-unsur kolom ke-3 matriks C!
- c. Tentukan nilai-nilai a_{11}, a_{22}, a_{33} !
- d. Tentukan nilai-nilai $b_{11} + b_{12} + b_{32}$!
- e. Tentukan nilai-nilai $c_{31} + c_{24} + c_{33} + c_{12}$!

2. Tentukan transpose dari matriks-matriks berikut!

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} x & 2z & 7 \\ 0 & 3x & 4 \\ y & 2z & 1 \end{pmatrix}$$

3. Tentukan nilai x, y, dan z yang memenuhi persamaan berikut!

$$\text{a. } \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & x \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ z & 2y \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{b. } \begin{pmatrix} x & 6 \\ 2y & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & z \\ x+z & 5 \end{pmatrix} \quad \text{c. } \begin{pmatrix} 3 & 2 & x \\ y & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z & 2 & 6 \\ z+2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

B. Operasi Matriks

Setelah mempelajari Pokok Bahasan ini, diharapkan anda dapat:

- Menentukan hasil penjumlahan dua buah matriks
- Menentukan lawan suatu matriks
- Menentukan hasil pengurangan matriks
- Menyebutkan sifat operasi penjumlahan Matriks

B.1. Penjumlahan

Dua matriks dapat dijumlahkan jika ordo kedua matriks tersebut sama. Hasil penjumlahan adalah matriks baru yang unsur-unsurnya merupakan hasil penjumlahan dari unsur-unsur yang seletak.

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = C_{m \times n} \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Contoh :

Diketahui matriks-matriks sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 9 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Tentukan :

- a. $A + B$
- b. $B + C$
- c. $C + D$

Jawab :

- a. $A + B$ tidak bisa dijumlahkan karena ordonya tidak sama
- b. $B + C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 & 3+6 \\ 1+8 & 0+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$
- c. $C + D$ tidak bisa dijumlahkan karena ordonya tidak sama

B.2. Lawan (invers jumlah) Suatu Matriks

Lawan dari matriks A dinotasikan dengan $-A$ yaitu suatu matriks yang unsur-unsurnya lawan dari unsur-unsur matriks A.

Contoh :

Tentukan lawan dari matriks berikut!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Jawab:

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ -3 & -7 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad -B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad -C = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -1 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

B.3. Pengurangan Matriks

Jika A dan B matriks yang mempunyai ordo sama, maka $A - B = A + (-B)$

Contoh :

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$; Tentukan $A - B$ dan $A - A$,

Jawab :

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-5 & -3+9 \\ 1+2 & 4-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A - A = A + (-A) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & -3+3 \\ 1-1 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kegiatan 2

Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

1. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, dan $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tentukanlah:

- | | | |
|------------|------------------|------------------|
| a. $A + B$ | c. $B + C$ | e. $A + (B + C)$ |
| b. $B + A$ | d. $(A + B) + C$ | f. $A + O$ |

2. Pada soal nomor 1 periksa, apakah berlaku:

- | | |
|--------------------------------|-------------------|
| a. $A + B = B + A$ | [sifat komutatif] |
| b. $(A + B) + C = A + (B + C)$ | [sifat asosiatif] |
| c. $A + O = O + A$ | [sifat identitas] |

3. Sederhanakanlah!

a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$ b. $\begin{pmatrix} 3x & -6 \\ 7 & y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 5 \\ 2 & 3y \end{pmatrix} =$

4. P matriks persegi ordo $[2 \times 2]$, dan berlaku $P + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, maka tentukanlah matriks P

LATIHAN 2**Penjumlahan dan Pengurangan Matriks**

1. Carilah jumlah dari masing-masing matriks berikut!

a. $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} x & -y \\ -x & 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x & 2y \\ -x & y \end{pmatrix}$

b. $(3i \ 4j \ 5k) + (i \ -2j \ 3k)$

e. $\begin{pmatrix} -x & -u \\ y & -2v \\ z & 3w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x & 8u \\ 2y & 4v \\ -4z & -11w \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2a & b \\ 3a & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 2b \\ 4a & b \end{pmatrix}$

2. Tentukan lawan dari matriks-matriks di bawah ini!

a. $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

3. Jika A matriks persegi ordo $[2 \times 2]$, tentukan A dari masing-masing bentuk di bawah ini!

a. $A + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

b. $A - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

4. Tentukan a, b, c, dan d untuk bentuk berikut

a. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

5. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Tentukan matriks hasil penjumlahan berikut :

a. $(A + B) - C$ b. $A + (B - C)$ c. Apakah berlaku $(A + B) - C = A + (B - C)$

B.4. Perkalian Matriks dengan Bilangan Real

Setelah mempelajari Pokok Bahasan ini, diharapkan anda dapat:

- Menentukan hasil perkalian matriks dengan bilangan real
- Menyebutkan syarat perkalian dua buah matriks
- Menentukan hasil perkalian dua matriks

Jika k adalah bilangan real, maka perkalian matriks A dengan bilangan k adalah matriks baru yang unsur-unsurnya hasil kali unsur-unsur matriks A dengan k dan ditulis kA atau Ak.

Jika $A = (a_{ij})$, maka $kA = (ka_{ij})$

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, 2A = 2 \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 & 2.8 \\ 2.3 & 2.6 \\ 2.1 & 4.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 6 & 12 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

B.5. Perkalian dua Matriks

Jika A matriks ordo $m \times r$ dan B ordo $r \times n$, maka hasil kali matriks A dan B adalah matriks yang mempunyai ordo $m \times n$. Unsur baris ke-i dan kolom ke-j matriks hasil kali diperoleh dari perkalian unsur-unsur baris ke-i matriks A dengan unsur-unsur kolom ke-j matriks B kemudian dijumlahkan.

Syarat dua matriks dapat dikalikan jika jumlah kolom pada matriks pertama sama dengan jumlah baris pada matriks kedua

$$\boxed{\begin{aligned} & \mathbf{A}_{(m \times r)} \cdot \mathbf{B}_{(r \times n)} = \mathbf{C}_{m \times n} \\ & c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \dots + a_{ir} \cdot b_{rj} \end{aligned}}$$

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Tentukan a. A.B b. B.C c. B.A

Jawab:

$$a. \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2 + 1.1 & 3.(-3) + 1.4 \\ -2.2 + 3.1 & -2.(-3) + 3.4 \\ 8.2 + 5.1 & 8.(-3) + 5.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -1 & 18 \\ 21 & -4 \end{pmatrix}$$

b. B.A tidak bisa diselesaikan karena jumlah kolom matriks B tidak sama dengan jumlah baris pada matriks A.

$$c. \quad B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 + (-3).(-3) & 2.1 + (-3).5 \\ 1.2 + 4.(-3) & 1.1 + 4.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -13 \\ -10 & 21 \end{pmatrix}$$

B.6. Pemangkatan Matriks.

Jika A adalah matriks persegi maka $A^2 = A \cdot A$ dan $A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A$

$$A^4 = A^3 \cdot A$$

Contoh:

$$\text{Diketahui } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Maka } A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 21 & 28 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 21 & 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 42 \\ 126 & 161 \end{pmatrix}$$

Kegiatan 3

Perkalian Matriks

1. Tentukan hasil kali dari

a. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3$

2. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Tentukan

- a. $A \cdot B$ b. $B \cdot C$ c. $C \cdot B$ d. Apakah berlaku $B \cdot C = C \cdot B$

LATIHAN 3

Perkalian Matriks

1. Diketahui $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Tentukan nilai dari :

- a. $2X$ c. $5X$ e. $-X$
 b. $3X$ d. $(-1)X$ f. X^4
 g. Apakah setiap matriks $A_{m \times n}$ berlaku $(-1)A = -A$

2. Dengan menggunakan hasil dari soal nomor 1 Carilah:

- a. $2X + 3X$, dan buktikan bahwa $2X + 3X = 5X$
 b. $5X - 3X$, dan buktikan bahwa $5X - 3X = 2X$

3. Jika $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ carilah bentuk sederhana dari

- a. $P + Q$ c. $2(P + Q)$ e. $6P$
 b. $2P + 2Q$ d. $3(2P)$

Soal nomor 1, 2, dan 3 di atas memperlihatkan sifat perkalian bilangan real dengan matriks

4. Salin dan lengkapi titik di bawah ini

a. $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

5. Jika X adalah matriks persegi ordo 2, tentukan X .

a. $2X + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ b. $4X - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

6. Tentukan hasil perkalian matriks berikut ini:

a. $(3 \ 4) \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b. $(2 \ -3 \ 4) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

f. $(\cos A \ \sin A) \begin{pmatrix} \cos A & -\sin A \\ \sin A & \cos A \end{pmatrix}$

3.2 MENENTUKAN DETERMINAN DAN INVERS SUATU Matriks

A. Determinan Matriks Persegi

Setelah mempelajari Pokok Bahasan ini, diharapkan anda dapat:

- Menentukan determinan matriks persegi ordo 2
- Menentukan determinan matriks persegi ordo 3 dengan cara klasik
- Menentukan determinan matriks persegi ordo 3 dengan cara sarus

A.1. Determinan Matriks Persegi Ordo 2

Determinan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dinyatakan dengan $\det(A)$

atau $|A|$ dengan rumus : $\det(A) = a.d - b.c$

Contoh :

Hitunglah determinan matriks-matriks berikut,

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,

b. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$,

c. $D = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

Jawab

- a. $|A| = 2.(-1) - 4.3 = -2 - 12 = -14$
- b. $\det(B) = |B| = 3.4 - 2.6 = 12 - 12 = 0$
- c. $\det(D) = \cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

A.2. Determinan Matriks Persegi Ordo 3 (Pengayaan)

Jika $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ maka determinan A dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut

Cara 1 : $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

Contoh :

Tentukan determinan dari $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Jawab:

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1.8 - 2.4 + 5.(-10) = -50$$

Cara 2 : (Metode Sarrus) $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$$\det(A) = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - (a_{31}.a_{22}.a_{13} + a_{32}.a_{23}.a_{11} + a_{33}.a_{21}.a_{12})$$

Contoh:

Tentukan determinan dari $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Jawab:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1.4.2 + 2.0.3 + 5.2.1 - (3.4.5 + 1.0.1 + 2.2.2) \\ = 8 + 0 + 10 - (60 + 0 + 8) = 18 - 68 = -50$$

B. Invers Matriks

*Setelah mempelajari
Pokok Bahasan ini,
diharapkan anda dapat:*

- Menentukan invers matriks persegi ordo 2
- Menentukan adjoint matriks
- Menentukan invers matriks persegi ordo 3

B.1. Invers Matriks Ordo 2x2

Jika A dan B matriks persegi dan $A.B = I$, maka B disebut invers matriks A atau sebaliknya.

Invers matriks A dinotasikan dengan A^{-1}

a. *Invers Matriks Persegi Ordo 2*

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka invers A ditulis

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Contoh:

Tentukan invers matriks berikut :

a. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Jawab:

a. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 5.2 - 2.4 = 10 - 8 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 12 - 12 = 0$, tidak mempunyai invers karena determinannya nol

Keterangan:

Matriks yang determinannya nol atau matriks yang tidak mempunyai invers disebut *matriks singular*

Matriks yang mempunyai invers disebut *matriks non singular*.

B.2. Invers Matriks Ordo 3x3

Jika $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, maka invers A ditulis $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$

Adj.(A) dibaca Adjoin A

$$\text{Adj.}(A) = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Contoh:

Jika $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, tentukan invers dari T!

Jawab:

$$\det(T) = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1(3 \cdot 2 - 1 \cdot 4) - 0(2 \cdot 2 - 1 \cdot 0) + 2(2 \cdot 4 - 3 \cdot 0) = 2 + 16 = 18$$

$$\text{Adj.}(T) = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -6 \\ -4 & 2 & 3 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 8 & -6 \\ -4 & 2 & 3 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Kegiatan 4

Determinan dan Invers Matriks

1. Tentukanlah determinan untuk masing-masing matriks berikut!

a. $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

c. $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

2. Tentukanlah x , jika :

a. $P = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 9 & x \end{pmatrix}$, $\det.P = -5$

b. $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & x & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det.Q = -35$

3. Diketahui $P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, tentukan:

- a. $\det(P)$
- b. $\text{Adj}(P)$
- c. invers matriks P
- d. Buktikan bahwa $P^{-1} \cdot P = P \cdot P^{-1} = 1$

LATIHAN 4

Determinan dan Invers Matriks

1. Tentukan determinan masing-masing matriks berikut!

a. $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

c. $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

d. $D = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

e. $E = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$

2. Tentukan determinan masing-masing matriks berikut!

a. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

b. $N = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

3. Tentukan x pada masing-masing persamaan dibawah ini!

a. $\begin{vmatrix} x-1 & x \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} = 7$

b. $\begin{vmatrix} x+3 & x \\ 7 & x+1 \end{vmatrix} = 1$

4. Tentukanlah invers dari matriks-matriks berikut!

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

b. $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

5. Tentukan invers dari matriks berikut : $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 10 \end{pmatrix}$

3.3 MENGGUNAKAN DETERMINAN DAN INVERS SUATU Matriks

A. Persamaan Matriks

Setelah mempelajari Pokok Bahasan ini, diharapkan anda dapat:

- Menentukan matriks X pada $A \cdot X = B$ jika matriks A dan B diketahui
- Menentukan matriks X pada $X \cdot A = B$ jika matriks A dan B diketahui

A.1. Persamaan Matriks Bentuk $AX = B$

Penyelesaian persamaan matriks bentuk $AX = B$ dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad (\text{kedua ruas dikalikan dengan } A^{-1} \text{ dari kiri})$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

A.2 . Persamaan Matriks Bentuk $XA = B$

Penyelesaian persamaan matriks bentuk $XA = B$ dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

$$XA = B$$

$$XAA^{-1} = B \cdot A^{-1} \quad (\text{kedua ruas dikalikan dengan } A^{-1} \text{ dari kanan})$$

$$XI = B \cdot A^{-1}$$

$$X = B \cdot A^{-1}$$

Contoh 1:

Tentukan matriks X yang memenuhi persamaan berikut :

$$X \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 23 & 13 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$\text{Misal } P = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 23 & 13 \end{pmatrix}$$

$$XP = Q \Rightarrow X = QP^{-1}$$

$$\text{Det}(P) = 5 - 6 = -1 \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = QP^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 23 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Contoh 2

Tentukan matriks $X_{(3 \times 3)}$ yang memenuhi persamaan berikut :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & 7 \\ 11 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Jawab

$$\text{Misal } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & 7 \\ 11 & 3 & 11 \end{pmatrix},$$

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.(0-1) - 1(6-1) + (-1)(2-0) = -1 - 5 - 2 = -8$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -5 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -5 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -1 & 7 \\ 8 & 2 & 7 \\ 11 & 3 & 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} -16 & -8 & -24 \\ 24 & -16 & -40 \\ -32 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kegiatan 5

Persamaan Matriks

1. Tentukan matriks X yang memenuhi persamaan berikut :

a. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$

c. $X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = (6 \ 2)$

b. $X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{pmatrix}$

2. Tentukan nilai-nilai a, b, c, dan d yang memenuhi persamaan berikut;

a. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

3. Tentukan nilai p + q, jika

a. $(p \ q) \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = (2 \ 2)$

b. $\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 16 \end{pmatrix}$

4. Tentukan matriks A_(3x3) yang memenuhi persamaan berikut

$$A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 15 \\ 2 & 10 & 2 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

LATIHAN 5

Persamaan Matriks

1. Tentukan matriks X yang memenuhi persamaan berikut

a. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

b. $X \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$

d. $X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 5)$

2. Tentukan x pada masing-masing persamaan dibawah ini!

a.
$$\begin{vmatrix} x-1 & x \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} = 7$$

b.
$$\begin{vmatrix} x+3 & x \\ 7 & x+1 \end{vmatrix} = 1$$

3. Tentukanlah invers dari matriks-matriks berikut!

$$\text{a. } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c. } C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{d. } D = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Tentukan matriks A yang memenuhi persamaan berikut

$$a. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 7 & -5 & 6 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 7 \\ -8 & 5 & -7 \\ -9 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

$$c. \quad A \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 7 & 7 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } A \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 7 & 6 & 5 \\ 6 & 10 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 47 & 35 \\ 32 & 50 & 12 \\ 40 & 38 & 28 \end{pmatrix}$$

$$d. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 9 & 6 & 4 \\ 9 & 6 & 8 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

B. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dengan Invers Matriks

*Setelah mempelajari
Pokok Bahaan ini,
diharapkan anda dapat:*

- Menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan invers matriks
 - Menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan determinan matriks

Perhatikan sistem persamaan berikut :

Karena $\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sistem persamaan (1)

dapat dinyatakan sebagai

persamaan matriks : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$,

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$$

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut:

$$x + y = 2$$

$$x - y = 6$$

Jawab:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 - 6 \\ -2 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jadi himpunan penyelesaian sistem persamaan itu adalah $\{(4,2)\}$

Kegiatan 6A

Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dengan Invers Matriks

Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut dengan menggunakan invers matriks

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| 1. $x - y = -3$
$x + y = 7$ | 3. $2x + 2y = 5$
$2x + 5y = 8$ | 5. $x - y = -3$
$2x + 7y = 3$ |
| 2. $3x + y = 5$
$6x - 2y = -6$ | 4. $x + 2y = 3$
$6x - y = 1$ | |

C. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dengan Determinan

*Setelah mempelajari
Pokok Bahasan ini,
diharapkan anda dapat:*

- Menentukan ordo suatu matriks
- Menyebutkan macam-macam

Perhatikan sistem persamaan berikut

$$ax + by = r$$

$$cx + dy = s$$

Jika diselesaikan dengan eliminasi, nilai x dan y ditentukan dengan langkah-langkah sebagai berikut

$$\begin{array}{l} ax + by = r \mid \times c \\ cx + dy = s \mid \times a \\ \hline bcy - ady = cr - as \\ (bc - ad)y = cr - as \\ y = \frac{cr - as}{bc - ad} \\ y = \frac{as - cr}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ax + by = r \mid \times d \\ cx + dy = s \mid \times b \\ \hline adx + bdy = dr \\ bcx + bdy = bs \\ \hline adx - bcx = dr - bs \\ (ad - bc)x = dr - bs \\ x = \frac{dr - bs}{ad - bc} \\ x = \frac{\begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D} \end{array}$$

Keterangan :

D : Determinan matriks koefisien x dan y

D_x : Determinan peubah x, koefisien peubah x diganti dengan konstanta

D_y : Determinan peubah y, koefisien peubah y diganti dengan konstanta

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut dengan determinan:

$$x + y = 2$$

$$x - y = 6$$

Jawab :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 1.1 = -2, D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 1.6 = -8, D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 1.6 - 2.1 = 4$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-8}{-2} = 4, y = \frac{D_y}{D} = \frac{4}{-2} = -2$$

Jadi himpunan penyelesaian sistem persamaan itu adalah $\{(4, -2)\}$

Kegiatan 6B

**Penyelesaian Sistem Persamaan Linear
dengan Determinan Matriks**

Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut dengan cara determinan

1. $3x - 2y = 53$	$6x - 3y = -3$	5. $x - 2y + 10 = 0$
$2x - y = 4$	$2x + y = 3$	$5x - 6y - 10 = 0$
2. $3x + y = 2$	4. $2x + y = -1$	
$5x + 2y = 6$	$2x + 3y = 5$	

LATIHAN 6

Penyelesaian Sistem Persamaan Linear

1. Gunakanlah invers matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan berikut

a. $x + y = 7$	b. $3x + 2y - 13 = 0$
$2x + y = 10$	$x - 3y + 3 = 0$
2. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut dengan cara determinan

a. $\frac{1}{2}x - y = -1$	b. $9x + 5y = 30$	c. $2x - y = 7$	d. $x + 3y = 7$
$x + \frac{1}{3}y = 5$	$4x - 3y = 76$	$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1$	$3x + 2y = -7$
3. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear berikut dengan invers matriks!

a. $2x - 3y + z = -1$	b. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 4$
$5x + 2z = 11$	$4x - 3y = 6$
$2x + 2y + 5z = 21$	$5y - 2z = 2$
4. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear berikut dengan determinan

a. $2x + 4y = 2$	b. $2x + y - 2z = 8$
$3x - 4z = -3$	$x + y + z = 8$
$4y + 3z = 3$	$3x + 4y + z = 8$

 **Uji kemampuan**

Berilah tanda silang (x) pada salah satu alternatif jawaban yang tepat!

1. Jika $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$ maka nilai dari $(7x-3y)(x-7y)$ adalah ...
 a. 82 b. 86 c. 92 d. 96 e. 14

2. Jika $P = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ dan $P.Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ maka $Q = \dots$
 a. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
 b. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

3. Jika $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & a \\ 2a+b & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 14 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$ maka nilai dari b^2+2b adalah
 a. 3 b. 6 c. 15 d. 24 e. 35

4. Jika $\begin{pmatrix} 10 & x-3 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 9 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ maka nilai dari $2x+3$ adalah
 a. 3 c. 29 e. 5
 b. 23 d. 31

5. Nilai x yang memenuhi $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 7 & -1 & 5 \\ 10 & 4 & x \end{vmatrix} = 0$ adalah ...
 a. 7 b. 8 c. 9 d. 10 e. 11

6. Nilai a yang memenuhi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 11 \\ 11 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$ adalah ...
 a. -3 b. -2 c. -1 d. 0 e. 1

7. Jika matriks $P = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 1 & x-2 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} 3 & x+4 \\ x & 5 \end{pmatrix}$ mempunyai determinan yang sama maka nilai x positif yang memenuhi adalah..
 a. 1 b. 2 c. 3 d. 4 e. 5

8. Jika $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, maka $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dots$
 a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$
 b. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

9. invers matriks $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b} \\ \frac{-1}{a-b} & \frac{1}{a+b} \end{pmatrix}$ adalah
- a. $\begin{pmatrix} a-b & a-b \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} a-b & -a+b \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a+b & -a+b \end{pmatrix}$
 b. $\begin{pmatrix} a-b & -a+b \\ -a-b & a+b \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -a+b & a-b \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$
10. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Jika X^T menyatakan transpose dari matriks X , dan $C = ((A - B)^T)^4$, maka $a + b + c - d = \dots$.
- a. 0 b. 1 c. 2 d. 3 e. 8
11. Nilai a yang memenuhi persamaan matriks
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ -2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 2c \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ adalah
- a. -3 b. -2 c. 1 d. 3 e. 6
12. Jika $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, maka $x + 2y = \dots$ (D10-P2-2003 No. 9)
- a. 6 b. 5 c. 4 d. 3 e. 2
13. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 3 & -4p \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5p & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} -10 & 8 \\ -4 & 6p \end{pmatrix}$.
 Jika matriks $A - B = C^{-1}$, nilai $2p = \dots$ (D12-P2-2001 No. 2)
- a. -1 b. $-\frac{1}{2}$ c. $\frac{1}{2}$ d. 1 e. 2
14. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ dan $A^2 = xA + yI$. x, y bilangan real dan I matriks identitas ordo 2×2 . nilai $x + y = \dots$ (P4-D12-2000 No. 7)
- a. -1 b. -3 c. 5 d. 11 e. 15
15. Ditentukan matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 9 & -16 \end{pmatrix}$.
 Jika $AB = C$, nilai $p = \dots$
- a. 32 b. 16 c. 0 d. -3 e. -8
16. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, dan $D = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$
 Pasangan matriks yang saling invers adalah
- a. B dan C b. B dan D c. C dan D d. A dan B e. A dan C
17. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 2 & 3n+2 \\ -6 & -18 \end{pmatrix}$.
 Nilai n yang memenuhi $A \cdot B = C + A^t$ (A^t : transpose matriks A) adalah
- a. $-6\frac{1}{3}$ b. -2 c. $\frac{2}{3}$ d. 2 e. $2\frac{2}{3}$
18. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4k+5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Nilai k yang memenuhi $A + B = C^{-1}$ adalah

- a. 1 b. $\frac{1}{2}$ c. -1 d. $-2 \frac{1}{2}$ e. -5

19. Diketahui determinan $\begin{vmatrix} 6 & 2x \\ x & x \end{vmatrix} = -8$. Nilai x yang memenuhi adalah ...

- a. -4 dan 1 b. -3 dan 1 c. -1 dan 4 d. 1 dan 4 e. 3 dan 1

20. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ x & 3 \end{pmatrix}$ adalah matriks singular. Nilai x =

- a. 2 b. 1 c. 0 d. -1 e. -2

SOAL URAIAN

1. Hitunglah determinan matriks $P = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 5+x & x \\ 5 & 3x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & -x \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

Tentukan nilai x jika determinan A = determinan B

3. Tentukan matriks X yang memenuhi persamaan :

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$

4. Diketahui $\begin{pmatrix} m & n \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 23 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}$, tentukan nilai m dan n

5. Tentukan invers dari matriks berikut : $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$