BAB 6 Limit dan Turunan

Standar Kompetensi:

6. Menggunakan konsep limit fungsi dan turunan fungsi dalam memecahkan masalah

Kompetensi Dasar:

6.1 Menjelaskan secara intuitif arti limit fungsi disuatu titik dan di takhingga
6.2 Menggunakan sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri
6.3 Menggunakan konsep dan aturan turunan dalam perhitungan turunan fungsi
6.4 Menggunakan turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi dan memecahkan masalah
6.5 Merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan ekstrim fungsi
6.6 Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan ekstrim fungsi dan penafsirannya

6.1 PENGERTIAN LIMIT

Setelah mempelajari Pokok Bahaan ini, diharapkan anda dapat:

* Menjelaskan arti limit fungsi di satu titik.
* Menghitung limit fungsi aljabar di satu titik.
* Menjelaskan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan limit.

Konsep limit merupakan landasan utama bagi pemahaman kalkulus diferensial dan integral yang merupakan suatu cabang dari matematika. Percatan limit dalam bahasa sehari-hari dapat berarti “ dekat”, “nyaris”, “hampir”, dll.

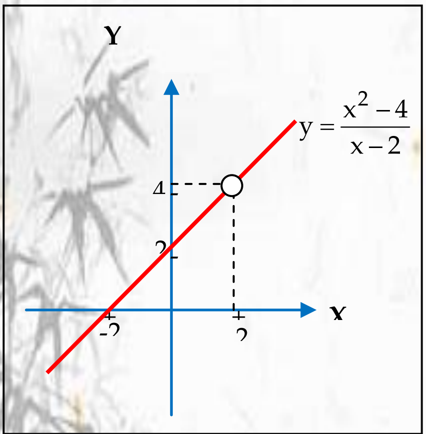
Berikut ini akan disajikan beberapa contoh sederhana untuk menjelaskan pengertian limit fungís aljabar.

Contoh :

Perhatikan fungsi f:R→R yang ditentukan oleh $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

Untuk x=2 maka f(2) tidak terdefinisi, mengapa?
Tetapi untuk x≠2 maka

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x+2$$



Perhatikan gambar disamping.

Tabel dibawah ini menunjukkan hubungan antara x dengan $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ jika x mendekati 2, dari kiri maupun dari kanan.

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	…	→2←	…	2,001	2,005	2,01	2,05	2,1
f(x)	3,9	3,99	3,999	3,9999	…	→4←	…	4,001	4,005	4,01	4,05	4,1

x mendekati 2 dari kiri
ditulis

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

x mendekati 2 dari kanan
ditulis

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

Dari tabel diatas tampak bahwa, jika x mendekati 2 maka nilai f(x) mendekati 4, baik didekati dari kiri maupun dari kanan. Hal semacam ini dapat ditulis

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$, dibaca "limit f(x) untuk x mendekati 2 sama dengan 4".

> Suatu fungsi f(x) dikatakan mempunyai limit L untuk $x \to a$
> jika dan hanya jika $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = L$

6.2 LIMIT FUNGSI ALJABAR DAN TRIGONOMETRI

Setelah mempelajari Pokok Bahaan ini, diharapkan anda dapat:

* Menjelaskan arti bentuk tak tentu dari limit fungsi.
* Menghitung bentuk tak tentu dari limit fungsi aljabar dan trigonometri.
* Menghitung limit fungsi yang mengarah ke konsep turunan.
* Menjelaskan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan bentuk taktentu limit fungsi

A. Limit Fungsi Aljabar

Pada dasarnya menentukan nilai limit fungsi f(x) untuk $x \to a$ kita dapat langsung mensubsitusikan a ke fungsi tersebut, jika hasilnya merupakan bilangan tertentu maka itulah nilai limit fungsi tersebut. Tetapi jika dengan mensubsitusi langsung diperoleh bentuk tak tentu ($\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$) maka perlu dilakukan cara khusus.

A.1.Limit Untuk x mendekati 0

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \quad \text{tidak ada}}$ dan $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty}$ dengan bahasa lain "tidak mempunyai limit"

Contoh :

Tentukan nilai limit dibawah ini:

1. $\lim\limits_{x\to 0} (x+5)$
2. $\lim\limits_{x\to 0} (x^2-4x)$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+2x}{3x}$

Jawab:

1. $\lim\limits_{x\to 0} (x+5) = 0+5 = 5$
2. $\lim\limits_{x\to 0} (x^2-4x) = 0^2 - 4.0 = 0 - 0 = 0$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+2x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(x+2)}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x+2)}{3} = \frac{0+2}{3} = \frac{2}{3}$

A.2.Limit Untuk x mendekati a

Contoh : Tentukan nilai limit dibawah ini:

1. $\lim\limits_{x\to 2} (4x-3)$
2. $\lim\limits_{x\to 3} (x^2-9)$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3+x}}{x-3}$

Jawab:

1. $\lim\limits_{x\to 2} (4x-3) = 4.2-3 = 8-3 = 5$

2. $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9) = 3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+3) = 1+3=4$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3+x}}{x-3} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{3+x}\right)}{x-3}\dfrac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{3+x}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{3+x}\right)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-x}{(x-3)\left(\sqrt{6}+\sqrt{3+x}\right)} =$

$\dfrac{-1}{\sqrt{6}+\sqrt{3+3}} = -\tfrac{1}{12}\sqrt{6}$

A.3.Limit Untuk x mendekati ~

Lambang ~ digunakan untuk melambangkan ketakhinggaan keadaan yang takdapat ditentukan besarnya, sehingga:

3. ~ = ~, 100. ~ = ~ , $\sqrt{\sim}$ = ~ , log~ = ~, ~ + 10 = ~ , ~ - 100 = ~

Jika $f(x) = \dfrac{1}{x}$ untuk x bilangan yang sangat besar sekali, untuk menentukan nilai $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ perhatikan tabel dibawah ini

x	1	2	3	…	10	…	1000	…	100000	…	1000000	…	~
$\frac{1}{x}$	1	1/2	1/3	…	0,1	…	0,001	…	0,00001	…	0,000001	…	0

Pada tabel diatas tampak bahwa jika x semakin besar, maka f(x) semakin kecil dan jika x→~ maka f(x) mendekati 0, maka dapat dikatakan:

$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0}$ dan $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty}$

Untuk menentukan nilai limit fungsi yang berbentuk $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ dapat dilakukan dengan membagi pembilang dan penyebut dengan pangkat tertinggi dari penyebut.

Contoh :

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+5}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x+5)}{(2x)}.\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+\frac{5}{x}}{2} = \dfrac{4+0}{2} = 2$

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+8x^2-1}{x^3+3x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(6x^3+8x^2-1\right)}{\left(x^3+3x\right)}.\dfrac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{3}{x^2}} = \dfrac{6+0-0}{1+0} = 6$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{3x+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{3x+5}.\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{3+\frac{5}{x}} = \dfrac{\sqrt{1+0}}{3+0} = \dfrac{1}{3}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+5}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\frac{5}{x^2}}{1} = 2.\infty + 0 = \infty$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5}{x^4+7} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5}{x^4+7}.\dfrac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^4}}{1+\frac{7}{x^4}} = \dfrac{0+0}{1+0} = 0$

A.4.Teorema Limit

Beberapa Teotema limit

1. Jika $f(x) = k$, maka $\lim\limits_{x \to a} f(x) = k$; ($k$ suatu konstanta)
2. Jika $f(x) = x$, maka $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$
3. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
4. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$
5. $\lim\limits_{x \to a} [f(x).g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \, . \, \lim\limits_{x \to a} g(x)$
6. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$; $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$
7. $\lim\limits_{x \to a} k.f(x) = k. \lim\limits_{x \to a} f(x)$; (k suatu konstanta)
8. $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n$

Kegiatan 1

Menentukan limit fungsi aljabar

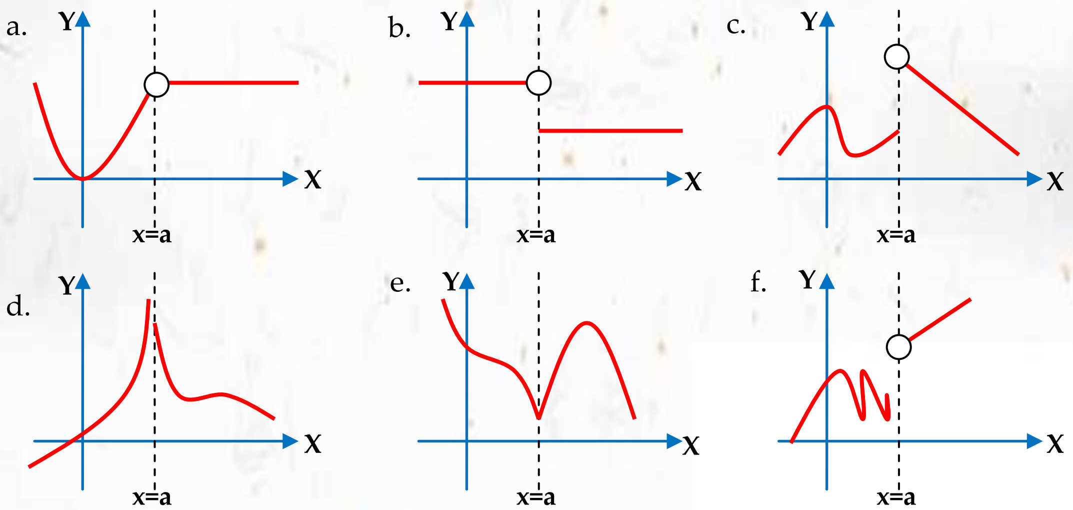
Tentukan nilai limit fungsi dibawah ini.

1. $\lim\limits_{x \to 2} x^2 - 2$ = ...
2. $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$ = ...
3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$ = ...
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 3x}{x}$ = ...
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4 + x} - \sqrt{4 - x}}{x}$ = ...
6. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 3x}{2x^2 4x + 5}$ = ...
7. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{2x^4 + 6x}}{x^2 + 5x - 2}$ = ...
8. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x + 6}{x^2 - 3x}$ = ...
9. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x - 3} - \sqrt{x^2 - 6x + 7}\right)$ = ...
10. $\lim\limits_{x \to \infty} \left[(2x + 1) - \sqrt{4x^2 - 3x}\right]$ = ...

LATIHAN 1

Menentukan limit fungsi aljabar

1. Periksalah grafik fungsi mana saja yang limitnya ada pada x=a



2. Diketahui $f(x) = \begin{cases} x & ;\text{untuk } x < 0 \\ x^2 - 2x & ;\text{untuk } x > 0 \end{cases}$, tentukan:

   a. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ c. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

   d. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ e. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ f. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

   g. $\lim\limits_{x\to -2} [f(x)]^3$ h. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{f(x)}{x}$ i. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{2x}{f(x)}$

3. Hitunglah nilai limit fungsi berikut:

   a. $\lim\limits_{x\to 2} x + \frac{2}{x}$ e. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ i. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2 - \sqrt{5 - x}}{x - 1}$

   b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{x - 1}$ f. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$ j. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2x - 1}}{x - 1}$

   c. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ g. $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x}}$ k. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 4}$

   d. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$ h. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{|x|}{2x}$ l. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x + 4} - \sqrt{2x + 1}}{\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 7}}$

4. Hitunglah nilai limit fungsi berikut:

   a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 - x - 3}$ e. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{3x^2}{x}$ i. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x\sqrt{x}}{1 - 2x^2}$

   b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 + 2x^2 - 6x}{4x^2 + x}$ f. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{4x^3 + 2x^2}{x^3 + x}$ j. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 3x} \right)$

   c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x+1)^2 - 1}{4x}$ g. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{(x+1)^3}{(x-1)(2x^2 + 3x + 5)}$ k. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{5x + 3}{\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{4x^2 + 7}}$

   d. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2 - \sqrt{4 - 3x}}{2x}$ h. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{4x + 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$ l. $\lim\limits_{x\to \infty} \left[(x - 1) - \sqrt{x^2 + 4x - 5} \right]$

B. Bilangan Alam (e)

Bilangan e diperoleh dari definisi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{atau} \quad \lim_{n\to 0}(1+n)^{1/n} = e$$; dengan nilai $e \approx 2{,}71828$

Bilangan e sering juga digunakan sebagai pokok logaritma. Logaritma dengan pokok e disebut logaritma naturalis. ${}^{e}\log x = \ln x$

Contoh :

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^2 = e^2$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^6 = e^6$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{2/x} = \left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right)^2 = e^2$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{5/x} = \left(\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{-1/2x}\right)^{-10} = e^{-10}$

Kegiatan 2

Menentukan limit fungsi aljabar

1. Gunakan kalkulator untuk melengkapi table dibawah ini

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	
10	
100	
1000	
1000000	
10.000.000	
100.000.000	
…	…
~	e =

n	$(1+n)^{1/n}$
-0,001	
-0,00001	
-0,00000001	
…	
0	e =
…	
0,00000001	
0,00001	
0,001	

Pada tabel diatas terlihat bahwa $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ dan $\lim\limits_{n\to 0}(1+n)^{1/n} = e$

2. Hitunglah nilai limit fungsi dibawah ini.

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{2x}$ = ...

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}$ = ...

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x}\right)^{4x}$ = ...

d. $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{3/x}$ = ...

e. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{2/x}$ = ...

LATIHAN 2

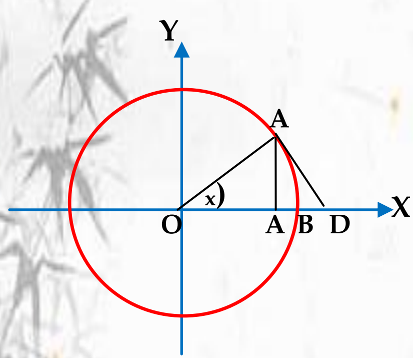
Menentukan limit fungsi aljabar

Hitunglah nilai limit fungsi dibawah ini.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{2x}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{5x}\right)^{10x}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x}\right)^{4x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{1/x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{3/x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{5/x}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1+4x}\right)^{3/x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{3/x}$

C. Limit Fungsi Trigonometri

Untuk menghitung $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ kita gunakan argument geometris, dengan x diartikan sebagai bilangan ukuran suatu sudut dengan satuan radian. Karena x mendekati nol, maka x dianggap bilangan kecil yang positif atau negative. Perhatikan gambar dibawah ini.



Pada gambar disamping tampak suatu lingkaran dengan jari-jari r = 1

Pada Δ**AOB**

$\text{Sin } x = \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{AB}{1}$; $AB = \sin x$

Pada Δ**DOB**

$\text{Tg } x = \dfrac{BD}{OB} = \dfrac{BD}{1}$; $BD = \text{Tg } x$

Karena x dalam radian, maka x juga merupakan panjang busur BC.

Ruas-ruas garis AB, BC dan BD berlaku hubungan:

$AB < BC < BD$

$\text{Sin } x < x < \text{tg } x$

$1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$ atau $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$

untuk x mendekati 0, maka

$$\lim_{x\to 0} 1 < \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} < \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} \quad \text{atau} \quad \lim_{x\to 0}\cos x < \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} < \lim_{x\to 0} 1$$

$$1 < \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} < 1 \quad \text{atau} \quad 1 < \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} < 1$$

Karena $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$ maupun $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ teletak antara 1 dan suatu bilangan mendekati 1 maka haruslah: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1}$ dan $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$

Contoh 1

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}.\frac{2}{2} = 2.\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 2.1 = 2$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin x} = 3.\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 3.1 = 3$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}.\frac{3}{3} = \frac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2}.1 = \frac{3}{2}$

Dengan menggunakan $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ akan kita buktikan berlaku $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}.\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$$

dengan demikian berlaku $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1}$ dengan cara yang sama berlaku pula $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}=1}$

Contoh 2

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x.\operatorname{tg} x}{1-\cos 2x}$

Jawab. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x.\operatorname{tg} x}{1-\cos 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x.\operatorname{tg} x}{2\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2\sin x}.\frac{\operatorname{tg}x}{x}.\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{2}.1.1 = \frac{1}{2}$

Kegiatan 3

Menentukan limit fungsi trigonometri

Tentukan nilai dari limit fungsi berikut:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}$ = ...
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\operatorname{tg}x}$ = ...
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg}5x}$ = ...
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x^2}$ = ...
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x.\operatorname{tg}3x}$ = ...

LATIHAN 3

Menentukan limit fungsi trigonometri

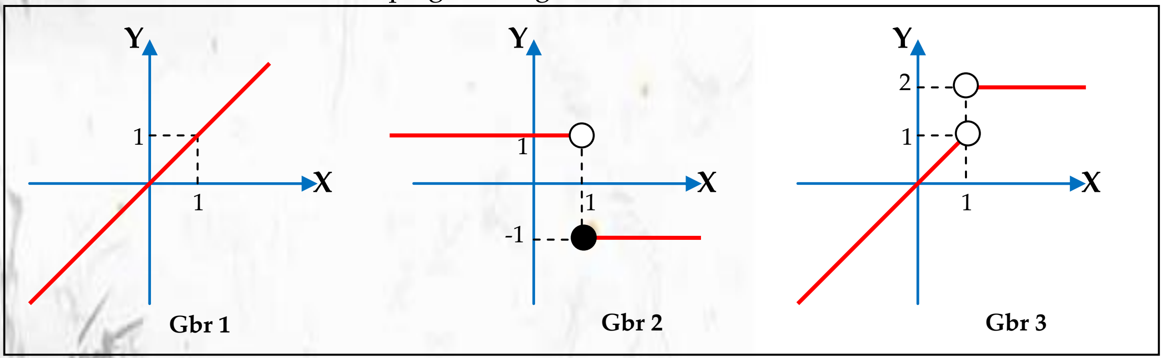
Tentukan nilai dari limit fungsi dibawa ini.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin 2x}{2x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 6xx}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{tg 3x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg 3x}{tgx}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xtgx}{1-\cos x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{tg^2 2x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg 2x - tgx}{\sin 2x - \sin x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{1-\cos 2x}$
11. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{tgx - tga}$
12. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{tg 2x - tg 2a}{tgx - tga}$
13. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{1+\cos 2x}{\cos x}$
14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$
15. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}\pi} \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$

D. Kontinuitas

Dalam membahas grafik suatu fungsi, kadang kita jumpai grafik yang bersambung tatapi ada pula yang terputus.

Perhatikan beberapa gambar grafik dibawah ini.



Gbr 1 Gbr 2 Gbr 3

Pada gambar 1, grafik fungsi f(x) = x tampak bahwa grafik fungsi f tersebut bersambung pada setiap titik.

Pada gambar 2, grafik fungsi f(x) = $\begin{cases} -1 & ;\text{untuk } x \ge 1 \\ 1 & ;\text{untuk } x < 1 \end{cases}$ tampak bawa grafik untuk x<1 atau x>1 bersambung, tetapi pada x=1 garik fungsi f terputus. Kita katakana bahwa grafik diskontinu pada x=1.

Pada gambar 3, grafik fungsi f(x) = $\begin{cases} 2 & ;\text{untuk } x > 1 \\ x & ;\text{untuk } x < 1 \end{cases}$ tampak bawa grafik untuk x<1 atau x>1 bersambung, tetapi pada x=1 garik fungsi f terputus. Kita katakana bahwa grafik diskontinu pada x=1.

Fungsi f dikatakan kontinu pada x=a, jika:

i. f(a) ada
ii. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ada
iii. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

ketiga syarat diatas seringkali disingkat dengan syarat iii saja, yaitu:

fungsi f kontinu pada x=a jika dan hanya jika $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Contoh 2

1. fungsi f ditentukan dengan rumus f(x) = $\begin{cases} x & ; \text{untuk } x \le 1 \\ x+1 & ; \text{untuk } x > 1 \end{cases}$, fungsi ini diskontinu pada x=1 karena $\lim_{x \to 1} f(x)$ tidak ada. (limit kiri tidak sama dengan limit kanan)
2. fungsi g ditentukan dengan rumus g(x) = $\frac{x^2-4}{x-2}$, fungsi ini diskontinu pada x=2 karena g(2) tidak ada.
3. fungsi h ditentukan dengan rumus h(x) = x^2-5 , fungsi ini kontinu pada x=1 karena $\lim_{x \to 1} h(x) = h(1) = -4$

Kegiatan 4

Menentukan kontinuitas suau fungsi

Selidiki kontinuitas fungsi dibawah ini.

1. f(x) = $\frac{x^2-1}{x-1}$, pada x=2 ....

....

2. f(x) = $\frac{x^2-1}{x-1}$, pada x=1 ....

....

3. g(x) = $\frac{1}{x-3}$, pada x=3 ....

....

LATIHAN 4

Menentukan kontinuitas suau fungsi

Selidiki kekontinuan fungsi f:x→f(x) pada x yang ditentukan.

1. f(x) = x^2-3x+5 pada x=2
2. f(x) = $\frac{2}{(x-3)^2}$ pada x=3
3. f(x) = $\frac{x^2-5x+6}{x-2}$ pada x=2
4. f(x) = $\frac{x^2-5x+6}{x-2}$ pada x=1
5. f(x) = $|x|$ pada x=0
6. f(x) = $\frac{1+x^3}{1+x}$ pada x=-1
7. f(x) = $\begin{cases} x & ; \text{untuk } x \le 2 \\ x^2-2x+2 & ; \text{untuk } x > 2 \end{cases}$ pada x=2
8. f(x) = $\begin{cases} -x & ; \text{untuk } x \le 1 \\ x^2-2x+2 & ; \text{untuk } x > 1 \end{cases}$ pada x=1

6.3 TURUNAN

A. Turunan Fungsi Aljabar

Setelah mempelajari Pokok Bahaan ini, diharapkan anda dapat:

* Menghitung turunan fungsi yang sederhana dengan menggunakan definisi turunan.
* Menjelaskan arti fisis dan arti geometri turunan di satu titik
* Menentukan laju. perubahan nilai fungsi terhadap variabel bebasnya.
* Menggunakan aturan turunan untuk menghitung turunan fungsi aljabar dan trigonometri.
* Menentukan turunan fungsi kom-posisi dengan aturan rantai.
* Menentukan persamaan garis singgung pada suatu kurva.

A.1.Pengertian dan Rumus Turunan

Turunan fungsi f(x) dinotasikan dengan f′(x) dan didefinisikan dengan

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Jika f mempunyai turunan untuk domain $D_f \in R$, untuk $a,b \in R$, maka :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'(b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$

Contoh :

1. Tentukan turunan dari $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Jawab.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2-(x+h)^2}{h(x+h)^2x^2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(-2x-h)}{h(x^4+2hx^3+h^2x^2)} = \lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{x^4+2hx^3+h^2x^2} = \frac{-2x-0}{x^4+0+0}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$$

2. Jika $g(x) = 3x^2$, tentukan g′(5)

$$g'(5) = \lim_{h\to 0}\frac{g(5+h)-g(5)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(5+h)^2-3(5)^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(30+3h)}{h} = \lim_{h\to 0}(30+h) = 30$$

A.2.Notasi Leibnizt

Pengembangan ide limit ini bermula dari pakar matematika berkebangsaan Inggris yaitu Isaac Newton (1643-1727) dan pakar matematika berkebangsaan Jerman yaitu Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Cara lain untuk menotasikan turunan dari fungsi y = f(x) terhadap x yaitu $\frac{df(x)}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx}$.

Cara penulisan turunan yang demikian disebut cara Leibniz atau notasi Leibniz

A.3.Turunan f(x) = axⁿ

Jika $f(x) = ax^n$ maka turunannya dirumuskan dengan $f'(x) = a.nx^{n-1}$

Contoh :

1. $f(x) = 4x^2 \Rightarrow f'(x) = 4.2x^{2-1} = 8x$
2. $f(x) = 6x^5+4x \Rightarrow f'(x) = 6.5x^{5-1}+4.1x^{1-1} = 30x^4 + 4$
3. $y = 5x^3 \Rightarrow y' = 5.3x^{3-1} = 15x^2$
4. $y = 4x^{-2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4(-2)x^{-2-1} = -8x^{-3} = \frac{-8}{x^3}$
5. $s = 4t^2-t \Rightarrow \frac{ds}{dt} = 8t - 1$

A.4. Nilai Fungsi Turunan

Nilai turunan fungsi f(x) pada x=a adalah f′(a)

Contoh :

Tentukan nilai turunan fungsi $f(x) = 3x^2$ pada x=5

Jawab.

$f(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x \Rightarrow f'(5) = 6.5 = 30$

Kegiatan 5

Menentukan turunan fungsi aljabar

1. Dengan menggunakan definisi turunan fungsi f(x) yaitu $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, jika

   $f(x) = x^2-2x$ tentukan:

   a. $f'(x) =$ ……………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………

   b. $f'(3) =$ ……………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………

2. Dengan menggunakan definisi turunan fungsi f(x) yaitu $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$,

   lengkapilah table dibawah ini.

f(x)	f′(x)
3	
3x	
$3x^2$	
$3x^3$	
$3x^4$	
…	
ax^n	

3. Gunakan rumus $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = a.nx^{n-1}$ untuk menentukan turunan fungsi dibawah ini.

   a. $f(x) = 7x^2 \Rightarrow f'(x) =$ ……………………………………………………………

   b. $y=4x^2+5x+6 \Rightarrow y' =$ ……………………………………………………………

   c. $m = px^2 \Rightarrow \frac{dm}{dx} =$ ……………………………………………………………

   d. $m = px^2 \Rightarrow \frac{dm}{dp} =$ ……………………………………………………………

4. Tentukan nilai turunan fungsi f(x) pada nilai x yang ditentukan
   a. $f(x) = x^3 - 2x$ pada x=1
   ……………………………………………………………………………………………
   b. $f(x) = x^2 - 4x$ pada titik potong kurva dengan sumbu X
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………

LATIHAN 5

Menentukan turunan fungsi aljabar

1. Dengan menggunakan rumus $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
   a. Jika $f(x) = \dfrac{4}{x^3}$ buktikan bahwa $f'(x) = \dfrac{-12}{x^4}$
   b. Jika $f(x) = x^2 - 6x$ buktikan bahwa $f'(3) = 0$
   c. Jika $f(x) = k$ (k suatu konstanta) buktikan bahwa $f'(x) = 0$

2. Gunakan rumus $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = a.nx^{n-1}$ untuk menentukan turunan fungsi dibawah ini.
   a. $f(x) = x$
   b. $f(x) = x^2$
   c. $f(x) = x^3$
   d. $f(x) = 6x^5$
   e. $f(x) = 6x^{\frac{1}{3}}$
   f. $f(x) = \sqrt{x}$
   g. $f(x) = \sqrt{x^5}$
   h. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
   i. $f(x) = 4x^2 - 6x$
   j. $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$
   k. $f(x) = x(x+3)$
   l. $f(x) = (x-2)(x+5)$
   m. $f(x) = (x-2)\sqrt{x}$
   n. $f(x) = (3x-1)^2$
   o. $f(x) = (x-2)^3$

3. Tentukan turunannya sesuai dengan notasi Leibniz yang ditunjukkan.
   a. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$; $\frac{dy}{dx}$
   b. $v = \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{5x}$; $\frac{dv}{dx}$
   c. $s = \sqrt[3]{5v^2} + \sqrt{3v}$; $\frac{ds}{dv}$
   d. $v = \left(t + \dfrac{1}{t}\right)\left(t - \dfrac{1}{t}\right)$; $\frac{dv}{dt}$
   e. $w = \dfrac{(1-u)(2-u)}{\sqrt{u}}$; $\frac{dw}{du}$
   f. $u = \dfrac{v+2}{2v}$; $\frac{dv}{du}$

4. Tentukan nilai x
   a. Jika $f(x) = 3x^2$ dan $f'(x) = 24$
   b. Jika $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$ dan $f'(x) = 6$
   c. Jika $f(x) = x^3 - 6x$ dan $f'(x) = 0$

5. Tentukan nilai turunan fungsi f(x) pada nilai x yang ditentukan.
   a. $f(x) = x^3 + 4x - 1$ pada x=0 dan x=1
   b. $f(x) = 3x + \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1}$ pada x=1 dan x=4

A.5.Turunan Penjumlahan, Perkalian dan Pembagian Fungsi-fungsi

Untuk **u** dan **v** fungsi dalam x, n bilangan rasional dan *k* suatu konstanta, maka berlaku:

1. $y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$
2. $y = k.u \Rightarrow y' = k.u'$
3. $y = u.v \Rightarrow y' = u'.v + v'.u$
4. $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{u'.v - v'.u}{v^2}$
5. $y = u^n \Rightarrow y' = n.u^{n-1}.u'$

Bukti 1.

Misalkan $y = f(x)$, $u = g(x)$ dan $v = m(x)$

$$
\begin{aligned}
& y = u + v \\
\Rightarrow\ & f(x) = g(x) + m(x) \\
\Rightarrow\ & f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h)+m(x+h)]-[g(x)+m(x)]}{h} \\
\Rightarrow\ & \quad = \lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h)-g(x)]+[m(x+h)-m(x)]}{h} \\
\Rightarrow\ & \quad = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{m(x+h)-m(x)}{h} \\
\Rightarrow\ & f'(x) = g'(x) + m'(x) \\
\therefore\ & y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'
\end{aligned}
$$

Bukti 2.

Misalkan $y = f(x)$ dan $u = g(x)$

$$
\begin{aligned}
& y = k.u \\
\Rightarrow\ & f(x) = k.g(x) \\
\Rightarrow\ & f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k.g(x+h)-k.g(x)}{h} = \\
& \quad = \lim_{h\to 0}\frac{k.[g(x+h)-g(x)]}{h} = k.\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = k.g'(x) \\
\therefore\ & y = k.u \Rightarrow y' = k.u'
\end{aligned}
$$

Bukti 3.

Misalkan $y = f(x)$, $u = g(x)$ dan $v = m(x)$

$$
\begin{aligned}
& y = u\,.\,v \\
\Rightarrow\ & f(x) = g(x)\,.\,m(x) \\
\Rightarrow\ & f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h).m(x+h)]-[g(x).m(x)]}{h} \\
\Rightarrow\ & \quad = \lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h).m(x+h)]-[g(x).m(x)]-g(x+h).m(x)+g(x+h).m(x)}{h} \\
\Rightarrow\ & \quad = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)[m(x+h)-m(x)]+m(x)[g(x+h)-g(x)]}{h} \\
\Rightarrow\ & \quad = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.m(x) + \lim_{h\to 0}\frac{m(x+h)-m(x)}{h}.g(x+h) \\
\Rightarrow\ & f'(x) = g'(x).m(x) + m'(x).g(x) \\
\therefore\ & y = u.v \Rightarrow y' = u'.v + v'.u
\end{aligned}
$$

Bukti 4.

Misalkan y = f(x), u = g(x) dan v = m(x)

$$y = \frac{u}{v}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{g(x)}{m(x)}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{g(x+h)}{m(x+h)} - \frac{g(x)}{m(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{m(x).g(x+h) - g(x).m(x+h)}{h.m(x+h).m(x)}$$

$$\Rightarrow \quad = \lim_{h \to 0} \frac{m(x).g(x+h) - g(x).m(x+h) + g(x).m(x) - g(x).m(x)}{h.m(x+h).m(x)}$$

$$\Rightarrow \quad = \lim_{h \to 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]m(x) - [m(x+h) - m(x)].g(x)}{h.m(x+h).m(x)}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{g'(x).m(x) - m'(x).g(x)}{m(x).m(x)}$$

$$\therefore \quad y = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2}$$

Contoh :

Diketahui $u = x^5$ dan $v = 2x+1$

1. Jika $y = u + v = (x^5)+(2x+1)$ maka $y' = u' + v' = 5x^4 + 2$
2. Jika $y = u.v = x^5\,(2x+1)$ maka $y' = u'.v + v'.u = 5x^4(2x+1) + 2.x^5 = 12x^5+5x^4$
3. Jika $y = \frac{u}{v} = \frac{x^5}{2x+1}$ maka $y' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2} = \frac{5x^4(2x+1) - 2.x^5}{(2x+1)^2}$

$$= \frac{8x^5 + 5x^4}{4x^2 + 4x + 1}$$

B. Dalil Rantai

Jika u adalah fungsi dalam x, maka turunan u terhadap x ditulis $\frac{du}{dx}$. Jika y adalah fungsi dalam x, maka turunan y terhadap x ditulis $\frac{dy}{dx}$. Turuna y terhadap x dapat pula diperoleh dari $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx}$ hal yang demikian sering disebut dengan Dalil Rantai.

Contoh :

Tentukan turunan dari:

a. $y = (x^2+5x)^3$

b. $y = \sqrt{3x+1}$

Jawab.

a. $y = (x^2+5x)^3$ misalkan $y = u^3$ dengan $u = x^2+5x$ sehingga $\frac{dy}{du} = 3u^2$ dan $\frac{du}{dx} = 2x+5$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = 3u^2\,(2x+5) = 3(x^2+5x)^2\,(2x+5) = (6x+15)(x^2+5x)^2$$

b. $y = \sqrt{3x+1} = (3x+1)^{\frac{1}{2}}$ misalkan $y = u^{\frac{1}{2}}$ dengan u = 3x+1 sehingga

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \text{ dan } \frac{du}{dx} = 3$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}.3 = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

Kegiatan 6

Menentukan turunan hasil operasi fungsi-fungsi

1. Diketahui u = x^2-5x dan v = 4x+2, tentukan y′ jika:
   a. y = u+v = ………….. ; y′ = …………………………………………………………
   b. y = 3u-4v = ………….. ; y′ = …………………………………………………………
   c. y = u.v = ………….. ; y′ = …………………………………………………………
   d. $y = \frac{u}{v}$ = ………….. ; y′ = …………………………………………………………
2. Tentukan turunan dari $y = (2x+5)\sqrt{x-2}$
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
3. Tentukan turunan dari $y = \frac{(4x-2)^2}{x+3}$
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………

LATIHAN 6

Menentukan turunan hasil operasi fungsi-fungsi

1. Tentukan turunan dari fungsi dibawah ini.
   a. $f(x) = (x^3+1)^2\,(x^2+3x-1)^5$
   b. $f(x) = \left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^3$
   c. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$
   d. $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x^2+3)^4}$
   e. $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+2}}$
   f. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}\sqrt{x^2+x+1}$
   g. $f(x) = \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^2$
   h. $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2x+1}$
   i. $f(x) = \sqrt{x^2+\sqrt{x+1}}$
   j. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$
2. Tentukan nilai dari f′(0) dan f′(2) pada soal dibawah ini.
   a. $f(x) = (2x+1)^3$
   b. $f(x) = (3+2x^2)^4$
   c. $f(x) = (x+5)^2\,(x^2-2)^3$
   d. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$

3. Jika $x^2+y^2 = 1$, tunjukkan bahwa $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

4. Jika $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ tunjukkan bahwa $f(x).f'(x) = x$

5. Diketahui $f(x) = x^2-6x+1$, tentukan f(a) jika $f'(a) = 0$

C. Turunan Fungsi Trigonometri

C.1. Turunan Fungsi Sinus dan Kosinus

Sebagaimana pada pembahasan sebelumnya, bahwa turuna fungsi f(x) diperoleh dari $f'(x)= \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, maka turunan fungsi-fungsi trigonometri adalah sebagai berikut:

1. **$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$**
2. **$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$**
3. **$f(x) = \mathrm{tg}\, x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$**

Bukti 1.

Akan dibuktikan bahwa $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$f(x) = \sin x$

$$\Rightarrow f'(x)= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$\Rightarrow \quad = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x.\cos h+\cos x.\sin h-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x.(\cos h-1)+\cos x.\sin h}{h}$$

$$\Rightarrow \quad = \sin x. \lim_{h\to 0} \frac{-(1-\cos h)}{h} + \cos x. \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \sin x \,.\, 0 + \cos x \,.\, 1$$

$$\Rightarrow f'(x)= \cos x$$

Bukti 2.

Akan dibuktikan bahwa $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

$f(x) = \cos x$

$$\Rightarrow f'(x)= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$\Rightarrow \quad = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x.\cos h-\sin x.\sin h-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x.(\cos h-1)-\sin x.\sin h}{h}$$

$$\Rightarrow \quad = \cos x. \lim_{h\to 0} \frac{-(1-\cos h)}{h} - \sin x. \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x\,.0 - \sin x.\,1$$

$$\Rightarrow f'(x)= -\sin x$$

Bukti 3.

Akan dibuktikan bahwa $f(x) = \mathrm{tg}\, x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$

$f(x) = \mathrm{tg}\, x$

$$\Rightarrow f'(x)= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{tg}(x+h)-\mathrm{tg}x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin((x+h)-x)}{h.\cos(x+h).\cos x}$$

$$\Rightarrow f'(x)= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} . \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos(x+h).\cos x} = 1.\frac{1}{\cos x.\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

C.2. Menentukan Turunan Fungsi Trigonometri

Rumus-rumus turunan fungsi aljabar yang telah kita pelajari berlaku juga untuk fungsi trigonometri.

Contoh : Tentukan turunan dari fungsi dibawah ini:

a. $f(x) = \sin(3x+4)$ b. $f(x) = 5x \cdot \cos x$ c. $f(x) = \dfrac{4x-5}{\cos x}$

Jawab:

a. $f(x) = \sin(3x+4)$, missal $f(x) = y = \sin u$ dengan $u = 3x+4$

$f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = \cos u \cdot 3 = 3\cos u = 3\cos(3x+4)$

$\therefore\ f(x) = \sin(3x+4) \Rightarrow f'(x) = 3\cos(3x+4)$

b. $f(x) = 5x \cdot \cos x$, missal $f(x) = y = u.v$ dengan $u = 5x$ dan $v = \cos x$

$f'(x) = y' = u'.v + v'.u = 5.\cos x + (-\sin x)5x = 5\cos x - 5x\sin x$

$\therefore\ f(x) = 5x \cdot \cos x \Rightarrow f'(x) = 5\cos x - 5x\sin x$

c. $f(x) = \dfrac{4x-5}{\cos x}$, missal $f(x) = y = \dfrac{u}{v}$ dengan $u = 4x-5$ dan $v = \cos x$

$$f'(x) = \frac{u'.v - v'.u}{v^2} = \frac{4.\cos x - (-\sin x)(4x-5)}{(\cos x)^2} = \frac{4\cos x + (4x-5)\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{4x-5}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{4\cos x + (4x-5)\sin x}{\cos^2 x}$$

D. Turunan Fungsi Eksponen dan Logaritma

Berikut ini adalah turunan dari fungsi eksponen dan logaritma

$$f(x) = {}^a\log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x.\ln a}$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x.\ln a$$

Bukti 1.

Akan dibuktikan bahwa $f(x) = {}^a\log x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x.\ln a}$

$f(x) = {}^a\log x$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{{}^a\log(x+h) - {}^a\log x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{{}^a\log \frac{x+h}{x}}{h}$$

$$\Rightarrow \quad = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}.{}^a\log\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{x}{x}\frac{1}{h}.{}^a\log\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x}.{}^a\log\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}.{}^a\log\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right) = \frac{1}{x}.{}^a\log e = \frac{1}{x.\ln a}$$

$$\therefore\ f(x) = {}^a\log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x.\ln a}$$

Bukti 1.

Akan dibuktikan bahwa $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x.\ln a$

$f(x) = a^x$ misalkan $y = a^x$

$\Rightarrow x = {}^a\log y$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y.\ln a}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y.\ln a = a^x.\ln a$

$\therefore \quad f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x.\ln a$

Contoh 1

a. Turunan dari $y = {}^2\log x$ adalah $y' = \frac{1}{x.\ln 2}$

b. Turunan dari $y = 5^x$ adalah $y' = 5^x.\ \ln 5$

Contoh 2 Tentukan turunan dari fungsi dibawah ini.

a. $f(x) = {}^3\log(2x+5)$ b. $f(x) = 4^{3x+7}$

Jawab.

a. $f(x) = {}^3\log(2x+5)$ missal $f(x) = y = {}^3\log u$ dengan $u = 2x+5$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{1}{u.\ln 3}.2 = \frac{2}{(2x+5).\ln 2}$

b. $f(x) = 4^{3x+7}$ missal $f(x) = y = 4^u$ dengan $u = 3x+7$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = (4^u.\ln 4)3 = 4^{3x+7}.3\ln 4 = 4^{3x+7}.\ln 4^3 = 4^{3x+7}.\ln 64$

Kegiatan 7

Menentukan turunan fungsi trigonometri, eksponen dan logaritma

Carilah turunan dari fungsi dibawah ini.

1. $f(x) = 2\sin x - 5\cos x$

   ……………………………………………………………………………………………

2. $f(x) = (2x+7) + 3\sin x$

   ……………………………………………………………………………………………

3. $f(x) = \sin x\ (2 + \cos x)$

   ……………………………………………………………………………………………

4. $f(x) = 4\sin(7x+2)$

   ……………………………………………………………………………………………

5. $f(x) = 3\cos^2 5x$

   ……………………………………………………………………………………………

6. $f(x) = {}^2\log(3x-7)$

   ……………………………………………………………………………………………

7. $f(x) = \ln(3x-5)$

   ……………………………………………………………………………………………

8. $f(x) = 5^{4x-2}$

   ……………………………………………………………………………………………

9. $f(x) = 2x^2.{}^3\log x$

   ……………………………………………………………………………………………

LATIHAN 7

Menentukan turunan fungsi trigonometri, eksponen dan logaritma

1. Carilah f′(x) dari f(x) yang diberikan.

a. $f(x) = \sin 4x$ d. $f(x) = \cos^2 x$ g. $f(x) = \cos x\,(1+\sin x)$
b. $f(x) = 2\sin 5x$ e. $f(x) = 2\sin^2 x$ h. $f(x) = \sin^2(3x+5)$
c. $f(x) = a \sin bx$ f. $f(x) = 3\cos^2 6x$ i. $f(x) = \cos^3(4x+5)^2$

2. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari soal berikut.

a. $y = x^2.\sin x$ d. $y = 2\sqrt{\sin x}$ g. $y = \sqrt{1+\sin^2 x}$
b. $y = (1-\sin x)(1+\cos x)$ e. $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ h. $y = \frac{2}{\cos x}$
c. $y = (x.\cos x)^2$ f. $y = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ i. $y = \frac{\sin x}{x}$

3. Buktikan bahwa:

a. $y = \sec x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec x.\ \mathrm{tg}\ x$
b. $y = \mathrm{ctg}\ x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\csc^2 x$
c. $y = \csc x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\csc x.\ \mathrm{ctg}\ x$

4. Tentukan turunan dari fungsi dibawah ini

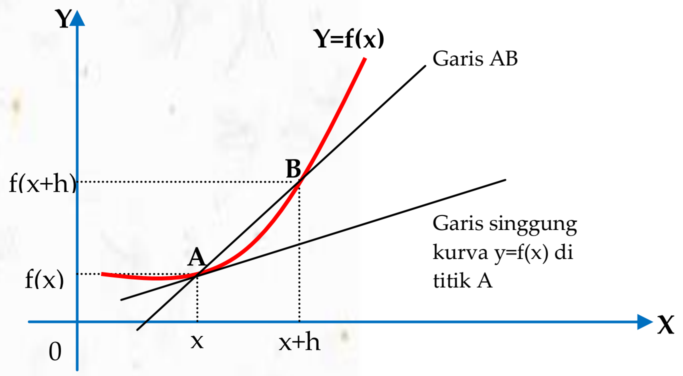
a. $f(x) = {}^{3}\log(4x-2)$ d. $f(x) = 3^{2x+8}$ g. $f(x) = 2^x.{}^{2}\log 3x$
b. $f(x) = \log(x^2+3x)$ e. $f(x) = 5^{x^2-2x+1}$ h. $f(x) = \ln \frac{x-1}{2x+3}$
c. $f(x) = \ln 4x$ f. $f(x) = e^{5x-2}$ i. $f(x) = \log^2 3x$

6.4 APLIKASI TURUNAN

A. Persamaan Garis Singgung pada Kurva

Setelah mempelajari Pokok Bahaan ini, diharapkan anda dapat:

* Menentukan selang di mana suatu fungsi naik atau turun.
* Menentukan titik stasioner suatu fungsi beserta jenis ekstrimnya.
* Menentukan titik belok suatu fungsi.



Perhatikan gambar grafik y = f(x) dengan A dan B adalah dua titik terletak pada kurva. Gradien garis AB adalah $m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}$. Jika titik B digeser mendekati A sehingga h mendekati nol, maka garis AB menjadi garis singgung kurva y = f(x) di titik A dengan gradien

$$m_{\text{garis singgung}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

A.1. Gradien Garis Singgung

Garadien garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $A(x_1,y_1)$ adalah $m = f'(x_1)$

Contoh :

Tentukan gradien garis singgung kurva $y = f(x) = x^2-4x$ di absis $x=5$

Jawab.

Persamaan gradient garis singgung adalah $f'(x) = 2x-4$
Gradien garis singgung di absis $x= 5$ adalah $m = f'(5) = 2.5-4 = 6$

A.2. Persamaan Garis Singgung

Sebagaimana diketahui bahwa persamaan garis yang melalui titik (x_1,y_1) dengan gradien m adalah $y-y_1 = m(x-x_1)$, karena garadien garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $A(x_1,y_1)$ adalah $m = f'(x_1)$ maka persamaan garis singgung kurva $y= f(x)$ di titik $A(x_1,y_1)$ dapat dirumuskan dengan:

$$\mathbf{y-y_1 = f'(x_1)(x-x_1)}$$

Contoh :

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = f(x) = x^2-4x$ di absis $x=3$

Jawab.

Persamaan gradien garis singgung adalah $f'(x) = 2x-4$
Gradien garis singgung di absis $x= 3$ adalah $m = f'(3) = 2.3-4 = 2$
Karena absis $x=3$ maka ordinat $y = f(3) = 3^2-4.3 = 9-12 = -3$, maka titik singgungnya $(3,-3)$
Persamaan garis singgung kurva $y = x^2-4x$ di titik $(3,-3)$ adalah

$$\mathbf{y-y_1 = f'(x_1)(x-x_1)}$$
$$\Rightarrow y-(-3) = 2(x-3)$$
$$\Rightarrow y = 2x-9$$

Kegiatan 8

Menentukan persamaan garis singgung

Tentukan persamaan garis singgung pada soal dibawah ini.

1. Kurva $y = x^2 - 3x + 2$ di titik $(3,2)$
   ……………………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………………..
2. kurva $y = x^3-4x$ di absis $x=1$
   ……………………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………………
3. Kurva $y = x^2 - 3x -4$ dan garis singgungnya sejajar dengan garis $y = 7-x$
   ……………………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………………

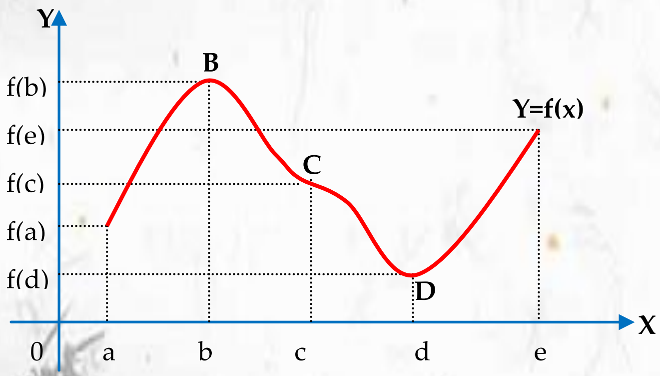
LATIHAN 8

Menentukan persamaan garis singgung

1. Tentukan gradient dan persamaan garis singgung setiap kurva dibawah ini pada titik yang diberikan.
   a. $y = 4x^2$ pada (1.4) c. $y = \frac{3}{x^2}$ pada (1,3)
   b. $y = x^3$ pada (2,8) d. $y = 1-x^2$ pada (3,-8)
2. Tentukan persamaan garis singgung kurva pada titik yang absisnya diketahui.
   a. $y = x^2 - 6x + 8$ pada x=3 c. $y = (2x+3)(x-1)$ pada x=-1
   b. $y = x^3+2x+3$ pada x=1 d. $y = \sqrt{2x-1}$ pada x=5
3. Tentukan persamaan garis yang tegak lurus dengan garis $x+3y-6=0$ dan menyinggung kurva $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$.
4. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2(x+3)$ yang sejajar dengan garis $y = 15x$.
5. Garis singgung kurva $y = x^4 - 3x^2$ sejajar dengan sumbu x di titik dengan absis x_1, x_2 dan x_3. Tentukan nilai dari $x_1 + x_2 + x_3$.

B. Fungsi Naik dan Fungsi Turun

B.1. Pengertian Fungsi Naik dan Fungsi Turun

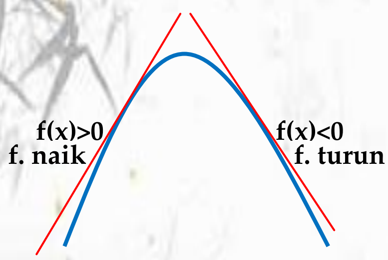


Perhatikan gambar grafik y = f(x) dalam selang tertutup [a,e] pada gambar disamping. Pada interval a≤x<b dan d<x≤e grafik fungsi tersebut naik. Pada interval b<x<c dan c<x<d grafik fungsi tersebut turun. Dalam hal ini titik **B** dan **D** disebut titik ekstrim.

Titik B(b,f(b)) disebut *titik balaik maksimum*
TitikD(d,f(d)) disebut *titik balik minimum*
Titik C(c,f(c)) disebut *titik belok*

B.2. Interval Fungsi Naik atau Turun

Turunan pertama suatu fungsi dapat digunakan untuk menyelidiki apakah suatu fungsi naik atau turun.



Kita mengetahui bahwa garis-garis singgung pada fungsi naik gradiennya selalu positif, dan garis-garis singgung pada fungsi turun gradiennya selalu negatif.
Karena f'(x) merupakan gradien garis singgung kurva f(x), maka:

Fungsi f(x) dikatakan naik pada suatu interval apabila $f'(x) > 0$
Fungsi f(x) dikatakan turun pada suatu interval apabila $f'(x) < 0$

Contoh :

Tentukan interval dimana fungsi $f(x) = 2x^3+3x^2-36x+12$ naik ataupun turun.

Jawab.

$f(x) = 2x^3+3x^2-36x+12$
$\Rightarrow \quad f'(x) = 6x^2+6x-36$
$\Rightarrow \quad f'(x) = 6(x-2)(x+3)$

+ + + | - - - | + + + **f′(x)**
-3 2 **x**

syarat f. naik yaitu $f'(x) > 0 \Rightarrow 6(x-2)(x+3)>0 \Rightarrow x<-3$ atau $x>2$
syarat f. turun yaitu $f'(x) < 0 \Rightarrow 6(x-2)(x+3)<0 \Rightarrow -3<x<2$
$\therefore$ f(x) naik pada interval $x<-3$ atau $x>2$
f(x) turun pada interval $-3<x<2$

Kegiatan 9

Menentukan interval fungsi naik atau turun

Tentukan interval dimana fungsi f(x) naik ataupun turun.

1. $f(x) = x^2-6x$
   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………
2. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$
   ………………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………..
   ………………………………………………………………………………………………
3. $f(x) = x^3$
   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………

LATIHAN 9

Menentukan interval fungsi naik atau turun

1. Untuk setiap fungsi berikut, tunjukkan dimana fungsi tersebut naik dan dimana fungsi tersebut turun.
   a. $f(x) = x^2-4x+3$ d. $f(x) = 1+x-x^2-x^3$ g. $f(x) = 3x-x^3$
   b. $f(x) = -x^2$ e. $f(x) = (x-4)^2$ h. $f(x) = 2x^3+6x^2-18x+13$
   c. $f(x) = -x^3$ f. $f(x) = x(x-2)^3$ i. $f(x) = x^5$
2. Tentukan interval fungsi naik dan interval fungsi turun dari fungsi dibawah ini
   a. $f(x) = 2x\sqrt{x+4}$ b. $f(x) = x-|x|$ c. $f(x) = \begin{cases} 1-2x\,; \text{untuk } x<0 \\ 3x-2\,; \text{untuk } x\geq 0 \end{cases}$
3. Tunjukkan bahwa $f(x) = 4+6x+x^3$ merupakan fungsi naik untuk semua $x \in R$.
4. Tunjukkan bahwa $f(x) = 1-x^3-x^7$ adalah fungsi turun untuk semua nilai x kecuali x=0.

C. Nilai Stationer dan Jenisnya

Pada fungsi f(x), jika $f'(x_o)$ maka $f(x_o)$ disebut nilai stationer dan $(x_o,f(x_o))$ disebut titik stationer.

Contoh :

$f(x) = x^2-8x \Rightarrow f'(x) = 2x-8$

Titik stationer diperoleh jika $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x-8 = 0 \Rightarrow x=4$

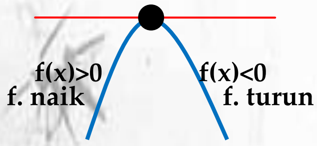
Nilai stationernya adalah $f(4) = 4^2-8.4 = -16$

Titik stationernya adalah (4,-16)

D. Jenis titik stationer

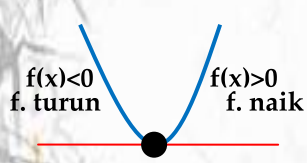
Ditinjau dari perubahan naik turunnya suatu fungsi, maka ada tiga jenis titik stationer, yaitu:

1. Titik balik maksimum



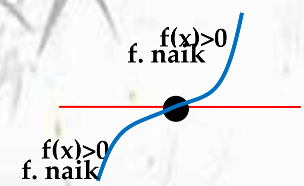
f(x) naik (f′(x)>0) kemudian diam (f′(x)=0) kemudian turun (f′(x)<0) maka titik stationernya disebut titik balik maksimum.

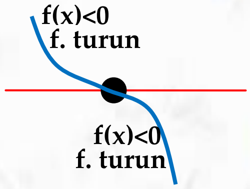
2. Titik balik minimum



f(x) turun (f′(x)<0) kemudian diam (f′(x)=0) kemudian naik (f′(x)>0) maka titik stationernya disebut titik balik maksimum.

3. Titik belok





f(x) naik (f′(x)>0) kemudian diam (f′(x)=0) kemudian naik lagi (f′(x)>0) atau f(x) turun (f′(x)<0) kemudian diam (f′(x)=0) kemudian turun lagi (f′(x)<0) maka titik stationernya disebut titik belok.

Contoh :

Tentukan titik-titik stationer dari $f(x) = 3x^4+16x^3-30x^2$ dan tettukan pula jenisnya

Jawab.

$f(x) = 3x^4+16x^3-30x^2$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 12x^3+48x^2-60x = 12x(x^2+4x-5) = 12x(x-1)(x+5)$

Nilai stationer diperoleh jika $f'(x) = 0$

$\Rightarrow \quad 12x(x-1)(x+5) = 0 \Rightarrow \quad x=0$ atau $x=1$ atau $x=-5$

untuk $x=0$, nilai stationernya $f(0) = 0$ sehingga titik stationernya $(0,0)$

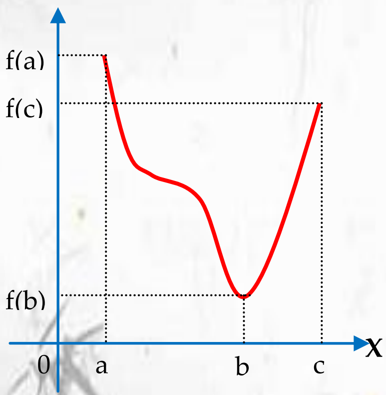
untuk $x=1$, nilai stationernya $f(1) = -11$ sehingga titik stationernya $(1,-11)$

untuk $x=-5$, nilai stationernya $f(-5) = 125$ sehingga titik stationernya $(-5,125)$

	x=-5	x=0	x=1
x	$(-5)_-$ (-5) $(-5)_+$	0_- 0 0_+	1_- 1 1_+
F'(x)	**- 0 +**	**+ 0 -**	**- 0 +**
Bentuk grafik			
Titik stationer	(-5,125)	(0,0)	(1,-11)
Jenis stationer	Balik minimum	Balik maksimum	Balik minimum

E. Nilai Maksimum dan Minimum

Perhatikan gambar grafik $f:x \rightarrow f(x)$ dalam selang tertutup [a,c] dibawah ini.



Pada gambar disamping, fungsi mencapai maksimum pada x=a dengan nilai maksimium f(a) dan (a,f(a)) disebut titik maksimum. Fungsi mencapai minimum pada x=b dengan nilai minimum f(b) dan titik (b,f(b)) disebut titik minimum.

Yang perlu diperhatikan bahwa nilai maksimum atau minimum suatu fungsi dalam suatu interval tertutup mungkin bukan nilai balik maksimum atau nilai balik minimum.

Nilai maksimum atau minimum suatu fungsi f pada selang tertutup diperoleh dari nilai stationer f dalam interval tersebut atau nilai f pada ujung-ujung interfal.

Contoh :

Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $f(x) = 3x^2-x^3$ dengan $D_f = \{^x/ -2 \leq x \leq 3; x \in R\}$

Jawab.

$f(x) = 3x^2-x^3 \Rightarrow f'(x) = 6x-3x^2$

Nilai stationer didapat jika $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 6x-3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(2-x) = 0 \quad \Rightarrow x=0$ atau $x=2$ (keduanya terletak dalam interval)

untuk $x=0$ maka nilai stationernya $f(0) = 0$

untuk $x=2$ maka nilai stationernya $f(2) = 4$

nilai pada ujung-ujung interval

untuk $x=-2$ maka $f(-2)= 20$

untuk $x=3$ maka $f(3) = 0$

Pada keempat nilai diatas, nilai tertinggi adalah 20 dan nilai terendah adalah 0.
Oleh karena itu kita sebut:
fungsi $f(x) = 3x^2 - x^3$ dengan $D_f = \{^x/ -2 \le x \le 3; x \in R\}$ mempunyai Nilai maksimum 20 dan nilai minimum 0.

F. Menggambar Grafik Fungsi Aljabar

Setelah mempelajari Pokok Bahaan ini, diharapkan anda dapat:
* Menggambarkan grafik fungsi.
* Menggunakan turunan dalam perhitungan kecepatan dan percepatan.
* Menggunakan turunan dalam perhitungan bentuk tak tentu limit fungsi.

Sekarang akan kita pelajari bagaimana cara menggambar grafik suatu fungsi dengan memperhatikan titik-titik stationer. Beberapa langkah untuk menggambar grafik:
1. Cari titik potong kurva dengan sumbu koordinat (jika ada).
2. Tentukan titik-titik stationer dan jenisnya
3. Tentukan nilai f(x) pada ujung-ujung interval

Contoh :

Gambarlah grafik $f(x) = x(x-3)^2$ dalam $D_f = \{^x/ -1 \le x \le 5 \,;\, x \in R\}$

Jawab.

Langkah 1

$Y = x(x-3)^2$

- titik potong sumbu x $\Rightarrow y=0 \quad \Rightarrow x(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x=0$ atau $x=3$

$\therefore$ titik potongnya di (0,0) dan (3,0)

- titik potong sumbu y $\Rightarrow x=0 \quad \Rightarrow y=0$

$\therefore$ titik potongnya di (0,0)

Langkah 2

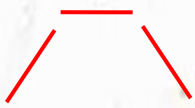
$f(x) = x(x-3)^2 \quad \Rightarrow f'(x) = (x-3)^2 + 2x(x-3) = (x-3)(3x-3)$

nilai stationer dicapai jika $f'(x) = 0$

$\Rightarrow (x-3)(3x-3) = 0 \Rightarrow x=3$ atau $x=1$

untuk x=1 maka nilai stationernya $f(1) = 1(1-3)^2 = 4$, titik stationernya

untuk x=3 maka nilai stationernya $f(3) = 3(3-3)^2 = 0$, titik stationernya (3,0)

	x=1	x=3
x	1_- 1 1_+	3_- 3 3_+
f'(x)	+ 0 -	- 0 +
Bentuk grafik		
Titik stationer	(1,4)	(3,0)
Jenis titik stationer	Titik balik maksimum	Titik balik minimum

Langkah 3

Nilai ujung-ujung interval

untuk x=-1 maka f(-1)= -16

untuk x=5 maka f(5) = 20

$\therefore$ titik ujung interval adalah (-1,-16) dan (5,20)

Gambar grafik $f(x) = x(x-3)^2$

(5,20)

(1,4)

(3,0)

(-1,-16)

Kegiatan 10

Menggambar grafik fungsi aljabar

Gambarlah grafik fungsi dibawah ini pada interval yang diberikan

1. $f(x) = x^2-4x$ dalam $D_f = \{^x/ -1\leq x\leq 5\ ;\ x\in R\}$

Langkah 1

y = f(x) = …………………

- titik potong sumbu x ⇒ y=0 ⇒ ………………………∴ titik potongnya di (……..)
- titik potong sumbu y ⇒ x=0 ⇒ ………………………∴ titik potongnya di (……..)

Langkah 2

f(x) = ………………… ⇒ f′(x) = ……………………………………………………..

nilai stationer dicapai jika f′(x) = 0

⇒ …………………………………………………………………………………………

untuk x= …… maka nilai stationernya f(…) = ………… , titik stationernya (…………)

	x=….
x	
f′(x)	
Bentuk grafik	
Titik stationer	
Jenis titik stationer	

Langkah 3

Nilai ujung-ujung interval

untuk x=……… maka f(…)= ……………………..

untuk x= ……… maka f(…) = ……………………

∴ titik ujung interval adalah (………..) dan (………..)

Gambar grafik $f(x) = x^2-4x$

2. $f(x) = 2x^2 - x^4$ dalam $D_f = \{x / -2 \le x \le 2 \; ; x \in R\}$

Langkah 1

y = f(x) = …………………

- titik potong sumbu x ⇒ y=0 ⇒ ……………………… ∴ titik potongnya di (……..)
- titik potong sumbu y ⇒ x=0 ⇒ ……………………… ∴ titik potongnya di (……..)

Langkah 2

f(x) = ………………… ⇒ f′(x) = ……………………………………………………..

nilai stationer dicapai jika f′(x) = 0

⇒ ……………………………………………………………………………………

untuk x= …… maka nilai stationernya f(…) = ………… , titik stationernya (…………)

untuk x= …… maka nilai stationernya f(…) = ………… , titik stationernya (…………)

	x=….	x=…..
x		
f′(x)		
Bentuk grafik		
Titik stationer		
Jenis titik stationer		

Langkah 3

Nilai ujung-ujung interval

untuk x=……… maka f(…)= ……………………..

untuk x= ……… maka f(…) = ……………………

∴ titik ujung interval adalah (………..) dan (………..)

Gambar grafik $f(x) = 2x^2 - x^4$

LATIHAN 10

Menggambar grafik fungsi aljabar

1. Tentukan nilai stationer dan jenisnya dari masing-masing fungsi dibawah ini.
   a. $f(x) = (x+1)(3-x)$
   b. $f(x) = 2x^3-9x^2+12x$
   c. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$
   d. $f(x) = 1-x^3$
   e. $f(x) = x^4-2x^3+1$
   f. $f(x) = 2 + x^{\frac{2}{3}}$
   g. $f(x) = x^4+4x^3-20x^2+2$
   h. $f(x) = (x-2)^2(x-4)^2$
   i. $f(x) = (x-2)(x-3)(x-4)+1$
2. Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi berikut dalam interval yang ditentukan
   a. $f(x) = x^2-9x$; dalam $D_f = \{^x/ -6 \le x \le 6 ; x \in R\}$
   b. $f(x) = x^3-6x^2+12x-6$; dalam $D_f = \{^x/ 0 \le x \le 3 ; x \in R\}$
   c. $f(x) = |x| + 1$; dalam $D_f = \{^x/ -3 \le x \le 5 ; x \in R\}$
3. Gambarlah grafik fungsi dibawah ini dengan terlebih dahulu menentukan titik-titik potong kurva dengan sumbu koordinat, titik stationer dan jenisnya dalam interval tertutup yang diberikan.
   a. $f(x) = x^3-6x^2$; dalam $D_f = \{^x/ -1 \le x \le 3 ; x \in R\}$
   b. $f(x) = x(x-3)^2$; dalam $D_f = \{^x/ -1 \le x \le 4 ; x \in R\}$
   c. $f(x) = 3x-x^3$; dalam $D_f = \{^x/ -2 \le x \le 2 ; x \in R\}$
4. Gambarlah kurva berikut
   a. $y = -x^4+2x^2$
   b. $y = x^4-2x^2-8$
   c. $y = x^5-5x^4+5x^3-2$

6.5 MODEL MATEMATIKA YANG BERKAITAN DENGAN EKSTRIM FUNGSI

A. Penerapan Maksimum dan Minimum dalam kehidupan sehari hari

Setelah mempelajari Pokok Bahaan ini, diharapkan anda dapat:

* Menjelaskan karakteristik masalah yang model matematikanya menentukan ekstrim fungsi.
* Menentukan besaran masalah yang dirancang sebagai variabel dalam ekspresi matematikanya.
* Merumuskan fungsi satu variabel yang merupakan model matematika dari masalah.

Dalam kehidupan sehari-hari sering kita jumpai permasalahan menentukan maksimum atau minimum dari suatu permasalahan yang dapat dibuat model matematikanya. Suatu permasalahan yang dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi, Nilai maksimum atau minimumnya dicapai jika turunan fungsinya sama dengan nol.

Contoh :

Suatu bangun berbentuk persegi panjang mempunyai keliling 100 meter. Berapakah panjang dan lebar yang harus dibuat agar luasnya maksimum.

Jawab.

Misalkan panjangnya x meter dan lebarnya y meter, maka dapat dibuat model matematikanya:

Keliling yaitu $K = 2(x+y) \Rightarrow 100 = 2(x+y) \Rightarrow y = 50 - x$

Luas yaitu $L = x \cdot y \Rightarrow L(x) = x(50-x) \Rightarrow L(x) = 50x - x^2$

Luas maksimum dicapai jika $L'(x) = 0 \Rightarrow 50-2x = 0 \Rightarrow x = 25$

$\Rightarrow y = 25$

Luas maksimum adalah $L(25) = 50.25 - 25^2 = 625\ m^2$

Dengan kata lain luas maksimu adalah 625 m² dicapai jika panjangnya 25 meter dan lebarnya 25 meter.

B. Turunan kedua suatu fungsi

Dari sembarang fungsi f(x) yang terdiferensialkan dalam daerahnya dapat disusun fungsi baru f′(x) yang daerahnya memenuhi $D_{f'} \subseteq D_f$. Dalam hal ini turunan fungsi f yaitu f′(x) disebut turunan pertama fungsi f. Kalau fungsi f′ juga terdeferensial dalam daerahnya, maka turunannya juga merupakan fungsi yang dilambangkan dengan f″ (dibaca f dua aksen) dan disebut turunan kedua fungsi f. Pendiferensiasian ini biasanya dapat dilanjutkan sehingga diperoleh turunan ketiga, keempat dan seterusnya.

Penotasian untuk menyatakan turunan berordo tinggi adalah:

y'' atau $f''(x)$ atau $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ disebut turunan kedua

y''' atau $f'''(x)$ atau $\dfrac{d^3f(x)}{dx^3}$ disebut turunan ketiga

$y^{(4)}$ atau $f^{(4)}(x)$ atau $\dfrac{d^4f(x)}{dx^4}$ disebut turunan keempat

Contoh 1

$Y = x^5+x^4-2x^3+x+5$

$\Rightarrow y' = 5x^4+4x^3-6x^2+1$

$\Rightarrow y'' = 20x^3+12x^2-12x$

$\Rightarrow y''' = 60x^2+24x-12$

Contoh 2 Jika $y = \sin(x^2+5)$ tentukan $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

Jawab.

$y = \sin(x^2+5)$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2x.\cos(x^2+5) \quad \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} = 2.\cos(x^2+5) + 2x.(-\sin(x^2+5).2x$

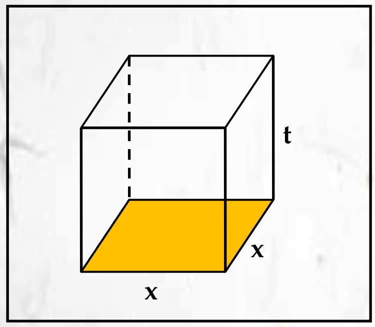
$\Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} = 2.\cos(x^2+5) - 4x^2.\sin(x^2+5)$

Kegiatan 11

Membuat model matematika yang berkaitan dengan ekstrim fungsi

1. Tentukan turunan kedua dari fungsi dibawah ini
   a. $f(x) = x^3+5x^2-2x+5$ $\Rightarrow f'(x) =$ ……………………………………………………………
      $\Rightarrow f''(x) =$ ……………………………………………………………
   b. $f(x) = (x^2-5)^3$ $\Rightarrow f'(x) =$ ……………………………………………………………
      $\Rightarrow f''(x) =$ ……………………………………………………………
   c. $f(x) = \sin^2 3x$ $\Rightarrow f'(x) =$ ……………………………………………………………
      $\Rightarrow f''(x) =$ ……………………………………………………………

2. Bak air tanpa tutup alasnya berbentuk persegi. Jika luas permukaan bak adalah 27 m^2, tetukan luas alas agar volume bak maksimum.



Luas permukaan = ... = 27
Tinggi t = ...
Volume = ...
V(x) = ...
V'(x) = ...
Syarat maksimum maka V'(x) = 0
....
....

Luas alas agar volumenya maksimum adalah ....
Volume maksimum Bak adalah ....

3. Sebuah bola ditendang, dalam waktu t detik lintasannya dirumuskan dengan $h(t) = 100t-t^2$. Jika h dalam meter, tentukan tinggi maksimum yang dapat dicapai bola tersebut.
....
....

LATIHAN 11

Membuat model matematika yang berkaitan dengan ekstrim fungsi

1. Tentukan turunan kedua dari fungsi dibawah ini
   a. $f(x) = (3x^2+5)^6$
   b. $f(t) = t^2\sqrt{t} - 3t$
   c. $f(x) = 3\sin x+\cos x$
   d. $f(x) = \dfrac{2x+1}{4x-5}$
2. Tentukan nilai dari:
   a. $f''(1)$ jika $f(x) = 6x^2+7x$
   b. $f''(4)$ jika $f(x) = 2\sqrt{x}$
3. Jika x.y = 1 buktikan bahwa $\dfrac{d^2y}{dx^2}.\dfrac{d^2x}{dy^2} = 4$
4. Bak air tanpa tutup alasnya berbentuk persegi. Jika luas permukaan bak adalah 60 m^2, tetukan luas alas agar volume bak maksimum.
5. Didalam sebuah kerucut dengan jari-jari 21 cm dibuat sebuah tabung. Tentukan jari-jari tabung agar volume tabung maksimum.

6.6 MENYELESAIANKAN MASALAH YANG BERKAITAN DENGAN EKSTIM FUNGSI DAN PENAFSIRANNYA

Setelah mempelajari Pokok Bahaan ini, diharapkan anda dapat:
- Menentukan penyelesaian dari model matematika.
- Memberikan tafsiran terhadap hasil yang diperoleh

A. Laju Perubahan Jarak Terhadap Waktu

A.1.Kecepatan Rata-rata

Laju perubahan rata-rata fungsi y = f(x) dalam daerah $a \le x \le b$ dengan a<b adalah

$$LPR_{[a,b]} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Contoh :

1. Sebuah Bus memerlukan waktu 1,5 jam untuk menempuh perjalanan dar kota A ke kota B yang jaraknya 63 km. Dalam bahasa sehari-hari dikataka bahwa kecepatan bus tersebut adalah 42 km/jam. Dalam bahasa matematika bilangan ini ialah:

$$\text{LPR}_{\text{A ke B}} = \frac{\text{Perubahan jarak}}{\text{Perubahan waktu}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{63}{1\frac{1}{2}} = 42\ {}^{\text{km}}\!/_{\text{jam}}$$

2. Laju perubahan rata-rata fungsi $f(x) = x^2-2x+3$ dalam daerah $0 \le x \le 3$ adalah

$$\text{LPR}_{[0,3]} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{6}{3} = 2$$

A.2. Kecepatan Sesaat

Laju perubahan rata-rata Bus dari kota A ke kota B pada contoh 1 diatas yang sebesar 42 km/jam, dalam kenyataannya kecepatan rata-rata ini tidak mencerminkan kecepatan konstan 42 km/jam selama perjalanan tersebut. Pada ½ jam pertama mungkin kecepatannya 30 km/jam dan ½ jam kedua mungkin kecepatannya 50 km/jam dan seterusnya. Dengan demikian kecepatan rata-rata hanya merupakan gambaran umum lajunya kendaraan sepanjang trayek sehingga tidak dapat digunakan sebagai indicator atau ukuran kecepatanBus pada suatu saat tertentu.

Misalkan fungsi $y = f(x)$ terdefinisi sekitar $x=c$, maka yang dimaksud Laju Perubahan Sesaat pada $x=c$ adalah:

$$\text{LPS}_c = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = \frac{df(c)}{dx} = f'(c)$$

Jika kecepatan pada waktu t detik dinyatakan dengan v m/det, maka $v = \frac{ds}{dt}$ adalah kecepatan sesaat. Perubahan kecepatan setiap waktu (percepatan) pada t detik adalah $a = \frac{dv}{dt}$ atau $\frac{d^2s}{dt^2}$.

Contoh :

Suatu benda beergerak dengan panjang lintasan s meter dalam waktu t detik ($t \ge 0$) ditentukan oleh rumus $s(t) = 6+5t-t^2$. Hitunglah:

a. Panjang lintasan pada t=1 detik atau t=3 detik
b. Kecepatan pada saat t=2 detik
c. Pada saat kapan kecepatannya nol
d. Percepatannya

Jawab.

a. Pada t=1 detik panjang lintasannya $s(1) = 6+5.1-1^2 = 10$ meter
   Pada t=3 detik panjang lintasannya $s(3) = 6+5.3-3^2 = 12$ meter
b. Rumus kecepatan adalah $v(t) = \frac{ds}{dt} = 5-2t$
   Kecepatan pada saat t=2 detik adalad $v(2) = 5-2.2 = 1$ meter/det
c. $v(t) = 0 \Rightarrow 5-2t = 0 \Rightarrow t = 2{,}5$ detik
d. Rumus percepatan adalah $a(t) = \frac{dv}{dt} = -2$ meter/det².

Kegiatan 12

Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan ekstrim fungsi dan penafsirannya

1. Hitunglah laju perubahan rata-rata (LPR) dari fungsi $f(x) = x^2+2x$ dalam interval $-3 \le x \le 1$.
   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………
2. Pada soal no 1, tentukan laju perubahan sesaat (LPS) pada $x=0$.
   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………
3. Suatu benda bergerak dengan panjang lintasan $s(t) = 3-6t+2t^3$ meter.
   a. Hitunglah panjang lintasan pada t= 1 detik
   ………………………………………………………………………………………………
   b. Tentukan rumus kecepatan dan perceatannya
   ………………………………………………………………………………………………
   c. Tunjukkan bahwa kecepatannya 0 pada saat t=1 detik
   ………………………………………………………………………………………………
   e. Hitunglah kecepatan pada saat percepatannya nol.
   ………………………………………………………………………………………………

LATIHAN 12

Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan ekstrim fungsi dan penafsirannya

1. Tentukan laju perubahan rata-rata fungsi dibawah ini pada interval yang diberikan
   a. $f(x) = -x^2+2x-1$; $0 \le x \le 3$ c. $f(x) = x^2$; $0 \le x \le 1$
   b. $f(x) = 1-x^2$; $1 \le x \le 4$ d. $f(x) = x^3$; $-1 \le x \le 1$
2. Sebuah pompa bensin diisi secara periodic setiap 12 hari sekali sebanyak kapasitasnya, yaitu 9.000 liter. Jika laju/tingkat penjualan bensin dianggap konstan, tentukan setelah berapa lama persediaan itu menjadi:
   a. $\frac{1}{2}$ bagian b. $\frac{1}{3}$ bagian c. $\frac{1}{10}$ bagian
3. Panjang lintasan s meter pada waktu t detik suatu benda sepanjang garis lurus ditentukan dengan rumus $s(t) = 2t(t^2-3)$ meter.
   a. Hitung panjang lintasan pada t= 1 detik dan t= 2 detik
   b. Tentukan rumus kecepatan (v) dan percepatannya (a)
   c. Tentukan t jika kecepatannya 0
   d. Hitunglah kecepatannya jika percepatannya 0.
4. Sebuah bola bergerak sepanjang garis lurus sehingga posisinya pada saat t detik dapat dirumuskan dalam $s(t) = t^3-30t^2+153t+184$ meter ; $t \ge 0$.
   a. Berapakah kecepatan dan percepatan awalnya
   b. Setelah berapa lama kecepatannya sama dengan nol
   c. Setelah berapa lama percepatannya menjadi nol
   d. Berapakah kecepatan dan percepatannya setelah 1 detik