

2012

*Bahan Ajar Matematika
kelas XII SMA/MA
Program IPA*

Bab
1

INTEGRAL



By
MUNTARYO



SMA Negeri 1 Garut

Jl. Merdeka No 91 Garut Jawa Barat

BIODATA

1. Nama lengkap : **MUNTARYO, S.Pd**
2. N I P : 19680303.199201.1.001
3. Tempat, tgl lahir : Jakarta, 3 Maret 1968
4. Jenis kelamin : Laki-laki
5. Agama : Islam
6. Pangkat, gol /ruang : Pembina, IV/a
7. Mengajar mata pelajaran : Matematika SMA
8. Unit kerja : SMA Negeri 1 Garut
9. Alamat sekolah : Jl. Merdeka no.91 Tarogong Garut Jawa Barat
Tlp/fax. 0262 233782
10. Alamat rumah : Jl. Otista no.2c Tarogong Garut
Tlp. 0262 540082, Hp.08157158621

11. Pendidikan

No	Tingkat	Nama Sekolah /PT	Jurusan	Tahun Lulus
1	SD	SDN Semper 03 Jak-Ut		1981
2	SLTP	SMPN 30 JI Anggrek Jak-Ut		1984
3	SLTA	SMAN 52 Cilincing Jak-Ut	A-1	1987
4	D-3	Universitas Indonesia Depok	Matematika	1991
5	S-1	IKIP Bandung	Matematika	1998

12. Penataran/pelatihan yang pernah diikuti:

- a. Pendidikan dan pelatihan peningkatan keimanan dan ketaqwaan siswa bagi guru dan kepala SLTP dan SLTA tingkat Propinsi Jawa Barat tahun 2000.
- b. Pembimbing peserta IMO (International Mathematic Olimpiad) tingkat nasional yang diselenggarakan di Bandung 11 September 2001.
- c. Pendidikan dan Pelatihan Implementasi Kurikulum 2004 untuk guru matematika tingkat propinsi Jawa Barat Tahun 2005
- d. Pelatihan IGTS (Internet Goes To School) dari PT Telkom Tasik Th 2006
- e. Pengajar/Fasilitator pada pelatihan implementasi Kurikulum melalui MGMP Matematika Kabupaten Garut yang diselenggarakan oleh UPTD BPG dinas Propinsi Jawa Barat Tahun 2006
- f. Pelatihan Model Pembelajaran bagi MGMP Matematika SMA yang diselenggarakan oleh BPG Propinsi Jawa Barat Tahun 2007
- g. Penyusunan Model Pengembangan Silabus Mata Pelajaran Matematika yang diselenggarakan oleh BPG tahun 2007
- h. Fasilitator pada pelatihan Implementasi KTSP melalui MGMP Matematika SMA Kab Garut yang diselenggarakan oleh BPG Propinsi Jawa Barat Tahun 2007.
- i. Peserta Pelatihan TOT Modul Dasar (1,2 dan 3) , DBE-3, Cianjur Tahun 2007
- j. Peserta Pelatihan TOT Modul 4 dan 5 Matematika, DBE-3, Hotel Cemara Jakarta Tahun 2008.
- k. Peserta Pelatihan TOT Modul 6 dan 7 Matematika, DBE-3, Hotel Ibis Jakarta Tahun 2008.
- l. Fasilitator TOT Modul Pembelajaran Bermakna, Hotel Wiwi Perkasa Indramayu Tahun 2009.
- m. Fasilitator Pelatihan Implementasi Kurikulum 2013 Guru sasaran SMA, Polteknikpos Bandung Tahun 2013

13. Tugas Tambahan di Sekolah

- a. Pembina Pecinta Alam (1997 – 1998)
- b. Pembina Seni (1998 - 2000)
- c. Penanggung jawab Lab Komputer (2000 - 2006)
- d. Pembantu Wakasek PSB (pusat Sumber Belajar) bidang ICT (2006 - 2008)
- e. Ketua Program Aplikasi Sekolah (PAS) (2008-2011)
- f. Pembantu Wakasek Kurikulum Bidang PAS (2011-2012)
- g. Pembantu Wakasek Kurikulum Bidang Jadwal KBM (2012- skrng)

14. Kegiatan diluar sekolah

- a. Tentor Bimbel Primagama Garut Tahun 1996 - 2004
- b. Tentor Bimbel Nurul Fikri Garut Tahun 2003 - 2005
- c. Tentor Bimbel Omega Tahun 1999 - 2011
- d. Tentor Bimbel GO Tahun 2007 - 2008
- e. Sekretaris MGMP Kabupaten Garut Tahun 2006 - 2009
- f. Ketua MGMP TIK Kabupaten Garut Tahun 2006 – sekarang
- g. Ketua MGMP Matematika D A Tahun 2006 – sekarang
- h. Trainer Matematika SMA program BPG untuk kab. Garut Tahun 2005 - 2009
- i. Trainer Matematika SMP program DBE3 untuk kab. Garut Tahun 2008 - 2010
- j. Trainer Matematika Tingkat Nasional program DBE3 untuk wilayah Jawa Barat Tahun 2009 - 2010 Tahun 2013 - sekarang
- k. Guru inti Matematika SMA untuk kabupaten Garut

Garut, 16 Juli 2012

MUNTARYO, S.Pd



Kata Pengantar

Puji Syukur penyusun panjatkan kehadiran Alloh SWT, karena atas limpahan rahmat-Nya, saya (Muntaryo) dengan segala keterbatasan dan kekurangan telah dapat menyusun bahan ajar "Integral" untuk siswa kelas XII SMA Program IPA semester 1.

Mengingat sulitnya mencari bahan ajar yang sesuai dengan kemampuan dan lingkungan siswa, maka penyusun merasa tergugah untuk membantu memfasilitasi bahan ajar yang sesuai dengan kondisi siswa di Sekolah.

Bahan ajar ini ini penyusun sajikan per Pokok Bahasan yang memuat kegiatan yang akan dilakukan siswa sehingga guru dapat melakukan penilaian proses selama KBM berlangsung, dan sebagai extention, siswa dapat diberikan PR berupa soal latihan.

Pembahasan Bahan Ajar ini akan lebih mengena jika guru dalam penyampaiannya menggunakan media elektronik berupa Power Point yang telah penyusun siapkan.

Harapan penyusun, semoga Bahan Ajar ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Apapun kreatifitas yang penyusun lakukan, semata berharap mencari keridhoanNya, oleh karena itu apabila Bahan Ajar ini terasa memberi manfaat, silahkan manfaatkan dan disebarluaskan.

Tiada gading yang tak retak, oleh karena itu kritik dan saran yang konstruktif dari semua pihak, khususnya rekan-rekan guru matematika sangat kami harapkan. Semoga usaha kita bersama ini mendapat perlindungan dan ridlo Alloh SWT. Amin.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

Garut, Ramadhan 1434 H

Penyusun



APERSEPSI untuk INTEGRAL
A. Bilangan Alam (e)

Bilangan e diperoleh dari definisi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{atau} \quad \lim_{n \rightarrow 0} (1+n)^{1/n} = e ; \text{ dengan nilai } e \approx 2,71828$$

Bilangan e sering juga digunakan sebagai pokok logaritma. Logaritma dengan pokok e disebut logaritma naturalis. $e^{\log x} = \ln x$

Contoh :

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right)^2 = e^2$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \right)^6 = e^6$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{2/x} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \right)^2 = e^2$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{5/x} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{-1/2x} \right)^{-10} = e^{-10}$$

Kegiatan 1
Menentukan Bilangan Alam

1. Gunakan kalkulator untuk melengkapi tabel dibawah ini

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	
10	
100	
1000	
1000000	
10.000.000	
100.000.000	
...	...
~	$e =$

n	$(1+n)^{1/n}$
-0,001	
-0,00001	
-0,00000001	
...	
0	$e =$
...	
0,00000001	
0,00001	
0,001	

Pada tabel diatas terlihat bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ dan $\lim_{n \rightarrow 0} (1+n)^{1/n} = e$

2. Hitunglah nilai limit fungsi dibawah ini.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}} = \dots$



- b. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{2x}} = \dots$
- c. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \dots$
- d. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+4x)^{3/x} = \dots$
- e. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{2/x} = \dots$

LATIHAN 2
Menentukan Bilangan Alam

Hitunglah nilai limit fungsi dibawah ini.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{3x}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{2x}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{5x}\right)^{10x}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x}\right)^{4x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+4x)^{1/x}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{3/x}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{5/x}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+4x}\right)^{3/x}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{3/x}$

B. Pengertian dan Rumus Turunan

Turunan fungsi $f(x)$ dinotasikan dengan $f'(x)$ dan didefinisikan dengan

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Jika f mempunyai turunan untuk domain $D_f \in R$, untuk $a, b \in R$, maka :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$



C. Turunan Fungsi Eksponen dan Logaritma

Berikut ini adalah turunan dari fungsi eksponen dan logaritma

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = a^x \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

Bukti 1.

$$\text{Akan dibuktikan bahwa } f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \\ \Rightarrow &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{x} \cdot \ln\left(\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right) = \frac{1}{x} \cdot \ln e = \frac{1}{x} \\ \therefore f(x) &= \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Bukti 2.

$$\text{Akan dibuktikan bahwa } f(x) = a^x \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a^x \log x \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{\log(x+h)} - a^{\log x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}}{h} \\ \Rightarrow &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot a^{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{h} \cdot a^{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot a^{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{x} \cdot a^{\log\left(\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right)} = \frac{1}{x} \cdot a^{\log e} = \frac{1}{x \cdot \ln a} \\ \therefore f(x) &= a^x \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} \end{aligned}$$

Bukti 3.

$$\text{Akan dibuktikan bahwa } f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

$$f(x) = a^x \text{ misalkan } y = a^x$$

$$\Rightarrow x = a^{\log y}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y \cdot \ln a}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

$$\therefore f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$



Contoh 1

- Turunan dari $y = {}^2\log x$ adalah $y' = \frac{1}{x \cdot \ln 2}$
- Turunan dari $y = 5^x$ adalah $y' = 5^x \cdot \ln 5$

Contoh 2

Tentukan turunan dari fungsi dibawah ini.

- $f(x) = {}^3\log(2x+5)$
- $f(x) = 4^{3x+7}$

Jawab.

- $f(x) = {}^3\log(2x+5)$ misal $f(x) = y = {}^3\log u$ dengan $u = 2x+5$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u \cdot \ln 3} \cdot 2 = \frac{2}{(2x+5) \cdot \ln 2}$$

- $f(x) = 4^{3x+7}$ misal $f(x) = y = 4^u$ dengan $u = 3x+7$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (4^u \cdot \ln 4)3 = 4^{3x+7} \cdot 3 \ln 4 = 4^{3x+7} \cdot \ln 4^3 = 4^{3x+7} \cdot \ln 64$$

Kegiatan 7

Menentukan turunan fungsi trigonometri, eksponen dan logaritma

Carilah turunan dari fungsi dibawah ini.

1. $f(x) = 2\sin x - 5\cos x$

.....

2. $f(x) = (2x+7) + 3\sin x$

.....

3. $f(x) = \sin x (2 + \cos x)$

.....

4. $f(x) = 4\sin(7x+2)$

.....

5. $f(x) = 3 \cos^2 5x$

.....

6. $f(x) = {}^2\log(3x-7)$

.....

7. $f(x) = \ln(3x-5)$

.....

8. $f(x) = 5^{4x-2}$

.....

9. $f(x) = 2x^2 \cdot {}^3\log x$

.....



1

INTEGRAL

BAB

Standar Kompetensi

- Menggunakan konsep integral dalam pemecahan masalah

Kompetensi Dasar

- 1.1 Menggunakan konsep, sifat, dan aturan dalam perhitungan integral tak tentu dan integral tentu.

A

Pengertian Integral

Indikator

- Mengenal arti Integral tak tentu
- Menurunkan sifat-sifat integral tak tentu dari turunan

Kalkulus merupakan salah satu konsep matematika yang sangat penting. Kalkulus terbagi menjadi dua bagian, yaitu Kalkulus Diferensial dan Kalkulus Integral. Dalam Kalkulus Diferensial dipelajari tentang fungsi turunan dengan berbagai aplikasinya seperti: 1) arti geometris fungsi turunan sebagai gradien garis singgung suatu kurva pada suatu titik, 2) dalam ilmu ekonomi fungsi turunan digunakan dalam penentuan *fungsi marjinal*, baik fungsi penerimaan marjinal maupun fungsi biaya marjinal, yang masing-masing diturunkan dari fungsi penerimaan total dan fungsi biaya total, 3) dalam fisika digunakan untuk menentukan kecepatan sebagai laju perubahan jarak terhadap waktu, dan kecepatan sebagai laju perubahan kecepatan terhadap waktu.

Integral sebagai anti turunan dapat digunakan untuk operasi kebalikan di atas, selain itu integral akan diaflikasikan dalam penentuan luas bidang. Integral secara garis besarnya terbagi atas Integral Tak Tentu (*Indefinite Integral*) dan Integral Tentu (*Definite Integral*).

A.1. Integral Sebagai Anti Turunan

	$F(x)$	$F'(x) = f(x)$
1	ax	a
2	$\frac{1}{2}x^2 + 3$	x
3	$\frac{1}{2}x^2 - 7$	x
4	$\frac{1}{2}x^2 + 100$	x
5	$\frac{1}{2}x^2 + c$	x
c : Konstanta		

Kebalikan atau invers dari operasi turunan (diferensial) disebut anti turunan (anti diferensial)

Definisi:

Fungsi $F(x) + C$ disebut anti turunan dari $f(x)$ jika $F'(x) = f(x)$

Perhatikan tabel berikut.

Secara umum anti turunan dari $f(x)$ adalah $F(x) + C$, jika $F'(x) = f(x)$

Contoh:

Carilah anti turunan dari $f(x) = x^2 - x - 2$

Jawab

$f(x) = x^2 - x - 2$ anti turunannya $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$, karena $F'(x) = x^2 - x - 2$



Kegiatan 1

Menentukan Anti Turunan

Cari anti turunan fungsi-fungsi berikut:

- | | |
|---------------------------|---|
| 1. $f(x) = 3$ | anti turunannya $F(x) = \dots\dots\dots\dots\dots$ karena $F'(x) = 3$ |
| 2. $f(x) = 4x + 5$ | anti turunannya $\dots\dots\dots\dots\dots$ |
| 3. $f(x) = 6x^2 + 4x - 5$ | anti turunannya $\dots\dots\dots\dots\dots$ |
| 4. $f(x) = 12x^3 + x$ | anti turunannya $\dots\dots\dots\dots\dots$ |
| 5. $f(x) = \sqrt{x}$ | anti turunannya $\dots\dots\dots\dots\dots$ |

LATIHAN 1

Menentukan Anti Turunan

Cari anti turunan untuk fungsi-fungsi berikut:

- | | | |
|--------------------|----------------------------------|---------------------------|
| 1. $f(x) = 8$ | 3. $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ | 5. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ |
| 2. $f(x) = 2x - 5$ | 4. $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 3x + 3$ | |

A.2. Notasi Integral

Anti turunan disebut juga integral tak tentu. Mencari anti turunan suatu fungsi artinya sama dengan mencari integral tak tentu fungsi tersebut.

Anti turunan menggunakan lambang \int yang digunakan oleh Leibniz:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Dibaca	: " Integral fungsi $f(x)$ terhadap x " atau "Integral $f(x)$ dx "
\int	: lambang pengintegralan
$f(x)$: fungsi integran
$F(x) + C$: hasil pengintegralan yang bersifat $f(x) = F'(x)$
dx, x	: disebut variabel integrasi.

B

Integral Tak Tentu

Indikator

- Mengenal arti Integral tak tentu
- Menurunkan sifat-sifat integral tak tentu dari turunan

Carilah integral tak tentu fungsi berikut ;

a. $\int (2x + 5) dx$ b. $\int (3x^2 - 4x + 1) dx$

Penyelesaian :

a. $\int (2x + 5) dx = x^2 + 5x + C$, karena $\frac{d}{dx}(x^2 + 5x + C) = 2x + 5$

b. $\int (3x^2 - 4x + 1) dx = x^3 - 2x^2 + x + C$



Kegiatan 2a

Menentukan Integral Taktentu

Carilah integral tak tentu fungsi berikut ;

1. $\int (10x + 8) dx$
2. $\int (2x^2 + 5x - 3) dx$
3. $\int (6x^2 + 10x - 2) dx$

4. $\int (2 - 3x + 4x^2 - 5x^3) dx$
5. $\int (12x^3 + 9x^2 - 3) dx$

B.1. Integral Fungsi Aljabar

Indikator

- Menentukan integral taktentu dengan menggunakan rumus integral

Perhatikan pengintegralan berikut, tentukan integral untuk nomor 5, 6 dan 7

1. $\int a dx = ax + c$
2. $\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + c$
3. $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$
4. $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c$

5. $\int x^4 dx = \dots$
6. $\int x^5 dx = \dots$
7. $\int x^n dx = \dots$

Secara umum, untuk n bilangan real dan n ≠ -1, berlaku rumus

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

Catatan :

- 1 Untuk n = -1 dan x > 0, $\int x^{-1} dx = \ln x + c$

$\ln x$ dibaca " lon x " yaitu logaritma natural x, logaritma yang mempunyai bilangan pokok $e \approx 2,718281828459045 \dots$, jadi $\ln x = e^{\log x}$

2. $\int e^x dx = e^x + c$

Contoh: Gunakan rumus di atas untuk mencari integral berikut :

1. $\int 3x^5 dx$
2. $\int \frac{1}{x^5} dx$
3. $\int 5e^x dx$
4. $\int 2x(x - \frac{1}{x})^2 dx$

Penyelesaian :

1. $\int 3x^5 dx = \frac{3}{5+1} x^{5+1} + c = \frac{3}{6} x^6 + c = \frac{1}{2} x^6 + c$

2. $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{1}{-5+1} x^{-5+1} + c = \frac{1}{-4} x^{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c$

3. $\int 5e^x dx = 5e^x + c$

4. $\int 2x(x - \frac{1}{x})^2 dx = \int 2x(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}) dx = \int (2x^3 - 4x + \frac{1}{x}) dx$
 $= \frac{2}{4}x^4 - \frac{4}{2}x^2 + \ln x + c = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + \ln x + c$



Kegiatan 2b

Menggunakan Rumus Integral Taktentu

Gunakan rumus di atas untuk mencari integral berikut :

1. $\int 8x^3 \, dx$
2. $\int \frac{-5}{x^9} \, dx$
3. $\int 2x(x - \frac{1}{x})^2 \, dx$
4. $\int x^3(x^{-2} + 24x) \, dx$
5. $\int (x^2 - 4x + \frac{1}{x} - e^x) \, dx$

LATIHAN 2

Menggunakan Rumus Integral Taktentu

Selesaikan integral-integral berikut:

1. $\int (8t^3 + 3t^2 - 4t + 2) \, dt$
2. $\int \frac{3Q^5 + 2Q^6 - 10Q^7}{Q^6} \, dQ$
3. $\int (30y^{29} - 15y^{14} + 10y^9 - y^4) \, dy$
4. $\int 4x^5(2x^2 + \frac{1}{x^2})^2 \, dx$
5. $\int (\sqrt[5]{x^3} + 3e^x) \, dx$
6. $\int v^2(\sqrt{v} - \sqrt[3]{v}) \, dv$
7. $\int \left(\frac{4}{u^3} + \frac{3}{\sqrt[3]{u^2}} \right) \, du$
8. $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \, dx$
9. $\int x^5 \left(\frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^6} - \frac{1}{x^9} \right) \, dx$
10. $\int \frac{2x^3 + 3x^2 - 20x}{x^2 + 4x} \, dx$

B.2. Integral Fungsi Trigonometri

Indikator

- Menghitung integral tak tentu fungsi trigonometri.

Perhatikan tabel berikut

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\Rightarrow \int \cos x \, dx = \sin x + c$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$\Rightarrow \int \sin x \, dx = -\cos x + c$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\Rightarrow \int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$
$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$	$\Rightarrow \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\Rightarrow \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$
$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$	$\Rightarrow \int \csc x \cot x \, dx = \csc x + c$



Contoh:

$$\int 5 \sin x \, dx = -5 \cos x + c$$

$$\int \cos u \, du = \sin u + c$$

$$\int 6 \sin(2x) \, d(2x) = -6 \cos(2x) + c$$

$$\int 2 \cos(3t+2) \, d(3t+2) = 2 \sin(3t+2) + c$$

Kegiatan 3

Menentukan Integral Fungsi Trigonometri

Tentukan integral berikut :

1. $\int (\cos x + x) \, dx$
2. $\int (3x^2 - \sin x) \, dx$
3. $\int \cos x (1 - \tan x) \, dx$
4. $\int \csc x (\cot x + \sin^2 x) \, dx$
5. $\int 2 \cos^2 \frac{1}{2} x \, dx$

LATIHAN 3

Menentukan Integral Fungsi Trigonometri

Tentukan integral berikut :

1. $\int (2x - 5 + \cos x) \, dx$
2. $\int \tan x (\cos x + \sec x) \, dx$
3. $\int \sec x (\sin 2x + \sec x) \, dx$
4. $\int \csc x (\csc x - \sin 2x) \, dx$
5. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx$

B.3. Penerapan Integral Tak Tentu

Kita dapat menentukan suatu persamaan kurva jika diketahui gradien garis singgung di titik $T(x,y)$ dengan menggunakan integral $f(x) = \int f'(x) \, dx$

Indikator

- Menyelesaikan masalah sederhana yang melibatkan integral tentu dan tak tentu

Contoh:

Kurva $y = f(x)$ melalui titik $(1,3)$ dan persamaan gradien garis singgung disetiap titik pada kurva tersebut $m = 2x$. Tentukan persamaan kurvanya.

Jawab

$$m = f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = \int f'(x) \, dx \Leftrightarrow f(x) = \int 2x \, dx \Leftrightarrow f(x) = x^2 + c$$

$$\text{Kurva melalui titik } (1,3) \Rightarrow f(1) = 3 \Leftrightarrow (1)^2 + c = 3 \Leftrightarrow c = 3 - 1 = 2$$

$$\text{Jadi } f(x) = x^2 + 2$$

Contoh:

Sebuah benda pada saat t detik bergerak dengan kecepatan $v = 6 - t$ (dalam m/det). Pada saat $t = 2$ detik benda berada pada jarak 25 meter. Tentukan persamaan gerak benda tersebut.



Penyelesaian :

$$s = \int v \, dt = \int (6 - t) \, dt = 6t - \frac{1}{2} t^2 + c$$

Pada saat $t = 2$ detik benda berada pada jarak $s = 25$ m

$$\begin{aligned} 6t - \frac{1}{2} t^2 + c &= s \\ 6(2) - \frac{1}{2} (2)^2 + c &= 25 \Leftrightarrow 12 - \frac{1}{2} (4) + c = 25 \\ \Leftrightarrow 12 - 2 + c &= 25 \Leftrightarrow c = 25 - 10 \Leftrightarrow c = 15 \end{aligned}$$

Jadi persamaan gerak benda adalah : $s = 15 + 6t - \frac{1}{2} t^2$

Kegiatan 4

Aplikasi Integral Tak tentu

1. Kurva $y = f(x)$ melalui titik $(2, -1)$ dan persamaan gradien garis singgung disetiap titik pada kurva tersebut $m = \frac{1}{2}x$. Tentukan persamaan kurvanya.
2. Sebuah benda pada saat t detik bergerak dengan kecepatan $v = 7 - 2t$ (dalam m/det). Pada saat $t = 3$ detik benda berada pada jarak 26 meter. Tentukan persamaan gerak benda tersebut.
3. Tentukan persamaan garis dengan persyaratan sebagai berikut :
 - a. Gradien 2 dan melalui titik $(3, 5)$
 - b. Sejajar dengan garis $y = 5 - 3x$ dan melalui titik $(2, 1)$

LATIHAN 4

Aplikasi Integral Tak tentu

1. Kurva $y = f(x)$ melalui titik $(2, -1)$ dan persamaan gradien garis singgung disetiap titik pada kurva tersebut $m = \frac{1}{2}x$. Tentukan persamaan kurvanya.
2. Sebuah benda pada saat t detik bergerak dengan kecepatan $v = 7 - 2t$ (dalam m/det). Pada saat $t = 3$ detik benda berada pada jarak 26 meter. Tentukan persamaan gerak benda tersebut.
3. Tentukan persamaan garis dengan persyaratan sebagai berikut :
 - a. Gradien 2 dan melalui titik $(3, 5)$
 - b. Sejajar dengan garis $y = 5 - 3x$ dan melalui titik $(2, 1)$
4. Tentukan persamaan grafik fungsi $y = f(x)$ dengan ketentuan berikut :
 - a. Melalui titik $(2, 5)$ dan gradien di sembarang titik adalah enam kali absisnya (koordinat x)
 - b. Grafik melalui titik $(-2, 6)$, garis singgung yang melalui titik tersebut sejajar dengan garis $y = 4x - 8$ dan $f''(x) = -8$
5. Sebuah benda pada saat t detik bergerak ke atas dengan kecepatan $v = 8 - 2t$ (dalam m/det). Pada saat $t = 1$ detik benda berada pada jarak 27 meter. Tentukan
 - a. Persamaan gerak benda tersebut.
 - b. Tinggi maksimum yang dicapai benda tersebut



C. Integral Tentu

C.1. Pengertian Integral Tentu

Indikator

- Menghitung integral dengan rumus integral substitusi
- Menghitung integral dengan rumus integral parsial
- Menghitung luas suatu daerah yang dibatasi oleh kurva dan sumbu-sumbu pada koordinat.
- Menghitung volume benda putar.

Kita sudah mempelajari konsep integral fungsi aljabar dan fungsi trigonometri dengan bentuk umum $\int f(x) dx = F(x) + C$, dimana $F'(x) = f(x)$. Integral yang tidak diberikan batas-batasnya seperti itu disebut integral tak tentu. Integral dengan batas-batas yang ditentukan disebut integral tentu, nilai integral tentu dari $f(x)$ adalah :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Contoh:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \int_2^5 (4x+6)dx = \left[2x^2 + 6x \right]_2^5 = [2(5)^2 + 6.5] - [2(2)^2 + 6.2] = 80 - 20 = 60 \\
 2. \quad & \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \sin^3 x \cdot \cos x dx = \left(\frac{1}{4} \sin^4 x \right)_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} = \frac{1}{4} [\sin^4(\frac{1}{3}\pi) - \sin^4(\frac{1}{6}\pi)] = \frac{1}{4} [(\frac{1}{2}\sqrt{3})^4 - (\frac{1}{2})^4] \\
 & = \frac{1}{4} [\frac{9}{16} - \frac{1}{16}] = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

Kegiatan 5

Menentukan nilai integral tentu

Tentukan nilai integral berikut :

- $\int_0^3 (3x^2) dx$
- $\int_{-1}^3 (1 + 6t^2)t dt$
- $\int_0^1 \frac{2x+2}{(x^2 + 2x + 3)^3} dx$
- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1} dx$
- $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$



LATIHAN 5

Menentukan nilai integral tentu

Tentukan nilai integral berikut :

$$1. \int_0^4 (3x^2 - 6x + 4)dx$$

$$2. \int_1^3 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx$$

$$3. \int_1^4 \frac{2x}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$4. \int_1^3 (2x-4)(x^2 - 4x + 3)dx$$

$$5. \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin t \cdot \cos^3 t dt$$

$$7. \int_0^2 \frac{2x+5}{x^2 + 5x - 6} dx$$

$$8. \int_5^{12} 2x \sqrt{169-x^2} dx$$

$$9. \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{25-4x^2}} dx$$

$$10. \int_0^4 \sqrt{16-t^2} dt$$

C.2. Sifat Integral Tentu

$$1. \int_a^b c dx = c(b-a)$$

$$2. \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$3. \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$4. \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$5. \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx, \text{ dengan } a \leq b \leq c$$

$$6. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

D.

Teknik Pengintegralan

Teknik dasar pengintegralan ada dua cara yaitu 1) cara substitusi, dan 2) pengintegralan parsial.

Indikator

- Menghitung integral dengan rumus integral substitusi
- Menghitung integral dengan rumus integral parsial

Bentuk umum teknik pengintegralan

1) Subtitusi fungsi aljabar:

$$a. \int \left(f(u) \frac{du}{dx} \right) dx = \int f(u) du$$

$$b. \text{ Integran berbentuk } \sqrt[n]{ax+b}, \\ \text{ subtitusi } u = \sqrt[n]{ax+b}$$

c. Integran berbentuk $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, dan $\sqrt{x^2 - a^2}$, untuk merasionalkan bentuk akar tersebut gunakan masing-masing substitusi berikut

(i) $x = a \sin t$, (ii) $x = a \tan t$, (iii) $x = a \sec t$

2) Pengintegralan parsial $\int u dv = uv - \int v du$



D.1. Integral Subsitusi

1. Pengintegralan bentuk $\int (ax + b)^n dx$, $\int \sin(ax + b) dx$ dan $\int \cos(ax + b) dx$ kita gunakan substitusi $u = (ax + b)$ seperti berikut

$$\text{Misal } u = (ax + b) \Rightarrow \frac{du}{dx}(ax + b) = a \Leftrightarrow du = a dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{a} du$$

$$\int (ax + b)^n dx = \int u^n \frac{1}{a} du = \frac{1}{a(n+1)}(ax + b)^{n+1} + c$$

$$\text{Jadi } \int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax + b)^{n+1} + c, n \neq 1, a \neq 0$$

$$\begin{aligned} \int \sin(ax + b) dx &= \int \sin u \frac{1}{a} du = \frac{1}{a} \int \sin u du = \frac{1}{a} (-\cos u) + c \\ &= -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } \int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$$

$$\int \cos(ax + b) dx = \int \cos u \frac{1}{a} du = \frac{1}{a} \int \cos u du = \frac{1}{a} \sin u + c = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$$

$$\text{Jadi } \int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$$

Kegiatan 6a
Menentukan integral dengan cara substitusi 1

Carilah integral berikut !

1. $\int (6x - 5)^3 dx$
2. $\int \sqrt[3]{(3-2x)^2} dx$
3. $\int (7x + 10)^{-5} dx$.
4. $\int \sin(3x + 2\pi) dx$
5. $\int \cos(3 - \frac{4}{5}x) dx$

2. Substitusi bentuk $\int \left(f(u) \frac{du}{dx} \right) dx$

Contoh: Hitunglah Integral $\int 2x\sqrt{3x^2 + 4} dx$

Jawab

$$\text{Misal } u = 3x^2 + 4 \Rightarrow du = 6x dx \Leftrightarrow \frac{1}{3} du = 2x dx$$

$$\int 2x\sqrt{3x^2 + 4} dx = \int (\sqrt{3x^2 + 4}) 2x dx = \int \sqrt{u} \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} u^{\frac{1}{2} + 1} + c = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\text{Jadi } \int 2x\sqrt{3x^2 + 4} dx = \frac{2}{9} \sqrt{(3x^2 + 4)^3} + c = \frac{2}{9} (3x^2 + 4) \sqrt{(3x^2 + 4)} + c$$

Kegiatan 6b

Menentukan integral dengan cara substitusi 2

Hitunglah integral berikut!

$$1. \int (4x-5)(2x^2-5x-4)^4 dx$$

$$3. \int \frac{\sin x}{\sqrt{3-7 \cos x}} dx$$

$$5. \int \frac{3x+5}{(3x^2+10x-2)^3} dx$$

$$2. \int (x-3)(x^2-6x-4)^5 dx$$

$$4. \int \frac{x-5}{x^2-10x+7} dx$$

3. Substitusi yang merasionalkan bentuk $\sqrt[n]{ax+b}$

Tentukan $\int x \sqrt[4]{(x+3)} dx$

Jawab :

$$\text{Misal } u = \sqrt[4]{x+3} \Rightarrow u^4 = x+3 \Leftrightarrow x = u^4 - 3 \Leftrightarrow 4u^3 du = dx$$

[catatan : turunkan ruas kiri dan ruas kanan terhadap variabel integrasi masing-masing,
 $x \rightarrow dx$ dan $(u^4 - 3) \rightarrow 4u^3 du$]

$$\int x \sqrt[4]{(x+3)} dx = \int (u^4 - 3)u \cdot 4u^3 du$$

$$= \int (4u^8 - 12u^4) du = \frac{4}{9}u^9 - \frac{12}{5}u^5 + C = \frac{4}{9}\sqrt[4]{(x+3)^9} - \frac{12}{5}\sqrt[4]{(x+3)^5} + C$$

Kegiatan 6c

Menentukan integral dengan cara substitusi 3

Contoh: Tentukan integral berikut!

$$1. \int x \sqrt{x-5} dx$$

$$3. \int \frac{x}{\sqrt{2x+5}} dx$$

$$5. \int \frac{t^2+2t}{\sqrt{t+1}} dt$$

$$2. \int x \sqrt[3]{(x-4)} dx$$

$$4. \int t \sqrt[5]{(t+6)} dt$$

4. Substitusi fungsi trigonometri

a. Bentuk $\int \sin^n x \cos x dx$

Misal $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$

$$\int \underbrace{\sin^n x}_{u^n} \underbrace{\cos x dx}_{du} = \int u^n du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1} x + C$$

Contoh :

$$\begin{aligned} \int \sin^6 x \sin 2x dx &= \int \sin^6 x \cdot 2 \sin x \cos x dx = \int 2 \sin^7 x \cos x dx \\ &= 2 \int \sin^7 x \cos x dx = \frac{2}{8} \sin^8 x + C \end{aligned}$$

b. Bentuk $\int \cos^n x \sin x dx$

Misal $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx \Leftrightarrow -du = \sin x dx$

$$\int \underbrace{\cos^n x}_{u^n} \underbrace{\sin x dx}_{-du} = - \int u^n du = -\frac{1}{n+1} u^{n+1} + c = -\frac{1}{n+1} \cos^{n+1} x + c$$

Contoh : $\int \cos^5 x \sin x dx = -\frac{1}{6} \cos^6 x + c$

Kegiatan 6d
Menentukan integral dengan cara subtitusi 4

$$\begin{array}{lll} 1. \int \cos^3 x \sin x dx = & 3. \int \sin^5 x \cos x dx = & 5. \int \frac{\sin 2x}{\sin^6 x} dx = \\ 2. \int \cos^8 x \sin x dx = & 4. \int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx = & \end{array}$$

b. Integran berbentuk $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, dan $\sqrt{x^2 - a^2}$

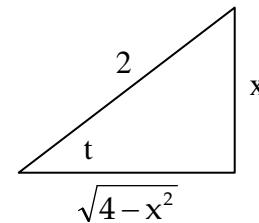
1. Integral $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, subtitusi $x = a \sin t$

2. Integral $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$

Contoh : Hitunglah integral berikut :

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$\begin{aligned} \sin t &= \frac{x}{2} \\ \cos t &= \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \end{aligned}$$



Gambar 1

Jawab :

Lihat Gambar 1:

$$\text{Misal } x = 2 \sin t \Rightarrow \sin t = \frac{x}{2} \Leftrightarrow t = \text{arc. sin}(\frac{x}{2}) \dots \dots \dots (1)$$

$$x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cdot \cos t dt \dots \dots \dots (2)$$

$$\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4 \cdot \sin^2 t} = \sqrt{4(1 - \sin^2 t)} = \sqrt{4 \cdot \cos^2 t}$$

$$\sqrt{4 - x^2} = 2 \cdot \cos t \dots \dots \dots (3)$$

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx = \int 2 \cdot \cos t \cdot 2 \cos t dt \quad [\text{catatan: pers. (2) dan (3)}]$$

$$= \int 4 \cos^2 t dt = \int 2.2 \cos^2 t dt$$

$$= \int 2(1 + \cos 2t) dt \quad [\text{catatan : } 2 \cdot \cos^2 t = \cos 2t + 1]$$

$$= \int (2 - 2\cos 2t) dt = 2t - 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2t + c$$

$$= 2t - 2\sin t \cdot \cos t + c \quad [\text{catatan : } \sin 2t = 2 \sin t \cos t]$$

$$= 2 \cdot \text{arc. sin}(\frac{x}{2}) - 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} + c$$

$$\text{Jadi } \int \sqrt{4 - x^2} dx = 2 \cdot \text{arc. sin}(\frac{x}{2}) - \frac{x}{2} \cdot \sqrt{4 - x^2} + c$$



Contoh 2

 Hitunglah : $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx$

Jawab

Lihat Gambar 2

 Misal $x = 3 \sec t \Rightarrow dx = 3 \cdot \sec t \cdot \tan t dt$

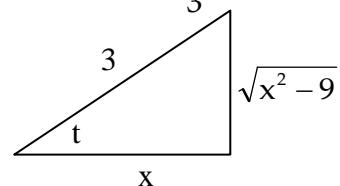
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 9} &= \sqrt{9 \cdot \sec^2 t - 9} = \sqrt{9(\sec^2 t - 1)} = \sqrt{9 \cdot \tan^2 t} \\ &= 3 \tan t \quad [\text{catatan : } \tan^2 t = \sec^2 t - 1]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx &= \int \frac{3 \cdot \tan t}{3 \cdot \sec t} 3 \cdot \sec t \cdot \tan t dt \\ &= 3 \int \tan^2 t dt = 3 \int (\sec^2 t - 1) dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 3(\tan t - t) + c = 3 \tan t - 3t + c \\ \text{Jadi } \int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx &= 3 \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3} - 3 \cdot \text{arc sec} \left(\frac{x}{3} \right) + c \\ &= \sqrt{x^2 - 9} - 3 \cdot \text{arc sec} \left(\frac{x}{3} \right) + c\end{aligned}$$

$$3 \sec t = x \Leftrightarrow \sec t = \frac{x}{3}$$

$$\Leftrightarrow t = \text{arc sec} \left(\frac{x}{3} \right)$$



$$\tan t = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3}$$

Gambar 2

Kegiatan 6e
Menentukan integral dengan cara substitusi 5

Tentukan integral berikut :

1. $\int \sqrt{25 - x^2} dx$

3. $\int \sqrt{4 - x^2} dx$

5. $\int \frac{\sqrt{9x^2 - 4}}{x} dx$

2. $\int \sqrt{9 - 4x^2} dx$

4. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x} dx$

LATIHAN 6
Menentukan integral dengan cara substitusi

1. $\int (4x + 3)^6 dx$

2. $\int \sin(7 - 6x) dx$

3. $\int \cos(3 - 2x) dx$

4. $\int \sqrt[5]{(3 - 2t)^3} dt$

5. $\int \frac{2x - 7}{(4x^2 - 28x - 40)^3} dx$

6. $\int \frac{3t}{\sqrt{t+1}} dt$

7. $\int \sin^2 x \sin 2x dx$

8. $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$

9. $\int \sqrt{25 - 4t^2} dt$

10. $\int \frac{\sqrt{9x^2 - 1}}{x} dx$



D.2. Integral Parsial

Jika pengintegralan dengan substitusi tidak berhasil diselesaikan, maka untuk menyelesaiakannya dapat menggunakan integral parsial. Metoda ini didasarkan pada pengintegralan rumus turunan hasil kali dua fungsi.

Untuk u dan v fungsi dari x ,

$$y = u.v \Rightarrow y' = u'.v + u.v' \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} \Leftrightarrow \frac{d(u.v)}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$$

$$\begin{aligned} d(u.v) &= v.du + u.dv \Rightarrow \int d(u.v) = \int v.du + \int u.dv \\ &\Leftrightarrow u.v = \int v.du + \int u.dv \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } \int u.dv = u.v - \int v.du$$

Contoh

Hitunglah :

$$1. \int x \cos x dx \quad 2. \int 6x(x+2)^3 dx$$

Jawab

$$1. \int x \cos x dx = \int u.dv$$

Misalkan $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = \cos x dx \Rightarrow \int dv = \int \cos x dx \Leftrightarrow v = \sin x$$

$$\int x \cos x dx = \int u.dv = u.v - \int v.du$$

$$= x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot \sin x - (-\cos x) + C = x \cdot \sin x + \cos x + C$$

$$\text{Jadi: } \int x \cos x dx = x \cdot \sin x + \cos x + C$$

$$2. \int 6x(x+2)^3 dx = \int u.dv$$

$$\text{Misalkan } u = 6x \Rightarrow du = 6 dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{6} du$$

$$dv = (x+2)^3 dx \Rightarrow v = \int (x+2)^3 dx \Leftrightarrow v = \frac{1}{4}(x+2)^4$$

$$\int 6x(x+2)^3 dx = \int u.dv = u.v - \int v.du$$

$$= \int 6x(x+2)^3 dx = 6x \cdot \frac{1}{4}(x+2)^4 - \int \frac{1}{4}(x+2)^4 \cdot 6 dx$$

$$= \frac{6}{4}x(x+2)^3 - \frac{6}{4} \cdot \frac{1}{4}(x+2)^4 + C$$

$$\text{Jadi } \int 6x(x+2)^3 dx = \frac{3}{2}x(x+2)^3 - \frac{3}{8}(x+2)^4 + C$$

Kegiatan 7

Menentukan integral dengan integral parsial

Carilah integral berikut :

$$1. \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^3}} dx$$

$$3. \int x \cdot \sin x dx$$

$$5. \int x \cdot \sin 2x dx$$

$$2. \int 3x(x+4)^5 dx$$

$$4. \int x^3 \cdot \sin x dx$$



LATIHAN 7

Menentukan integral dengan integral parsial

Gunakan integral parsial untuk menyelesaikan soal berikut:

- | | | |
|---------------------------|---|--|
| 1. $\int x \sin 3x dx$ | 5. $\int 2x \cos 5x dx$ | 8. $\int (x^2 - 4x - 5) \sin(2x+3) dx$ |
| 2. $\int 4x (x - 2)^3 dx$ | 6. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ | 9. $\int xe^x dx$ |
| 3. $\int x e^{2x} dx$ | 7. $\int x^2 \cos x dx$ | 10. $\int \ln x dx$ |
| 4. $\int 5x \sin x dx$ | [cat. $y = e^x \Rightarrow dy = e^x dx$, $y = \ln x \Rightarrow dy = \frac{1}{x} dx$] | |

E.

Luas Daerah

Indikator

- Menghitung luas suatu daerah yang dibatasi oleh kurva dan sumbu-sumbu pada koordinat.
- Menghitung volume benda putar.

Perhatikan daerah yang dibatasi oleh grafik $y = f(x)$, sumbu x, garis $x = a$ dan garis $x = b$ pada Gambar 1 berikut ini.

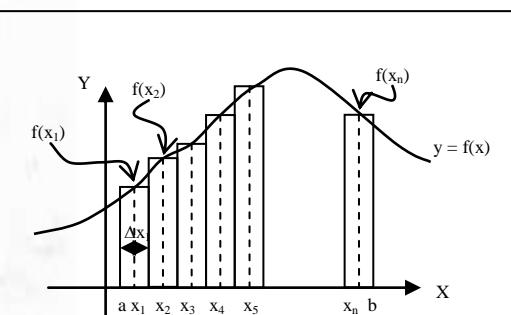
Daerah tersebut dibagi menjadi n buah persegi dengan lebar dibuat sekecil mungkin masing-masing $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_n$ dan panjangnya (tingginya): $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \dots, f(x_n)$.

Jumlah luas persegi panjang yang lebarnya Δx_i dan panjangnya $f(x_i)$ dengan i dari 1 sampai n mendekati luas

daerah gambar 1 di samping

Jadi $L \approx f(x_1).\Delta x_1 + f(x_2).\Delta x_2 + f(x_3).\Delta x_3 + \dots + f(x_n).\Delta x_n$, atau dengan menggunakan notasi sigma (Σ) ditulis : $L \approx \sum_{i=1}^n f(x_i).\Delta x_i$

Jika n dibuat besar sekali ($n \rightarrow \infty$) maka $\Delta x \rightarrow 0$ (Δx mendekati 0) sehingga L sama dengan luas daerah yang dibatasi oleh grafik $y = f(x)$, sumbu x, garis $x = a$ dan garis $x = b$ dan dapat ditulis



Gambar 1

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^b f(x) \cdot \Delta x$$

Bentuk limit penjumlahan $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^b f(x) \cdot \Delta x$, dapat ditulis dengan lambing pengintegralan, yaitu $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^b f(x) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx$

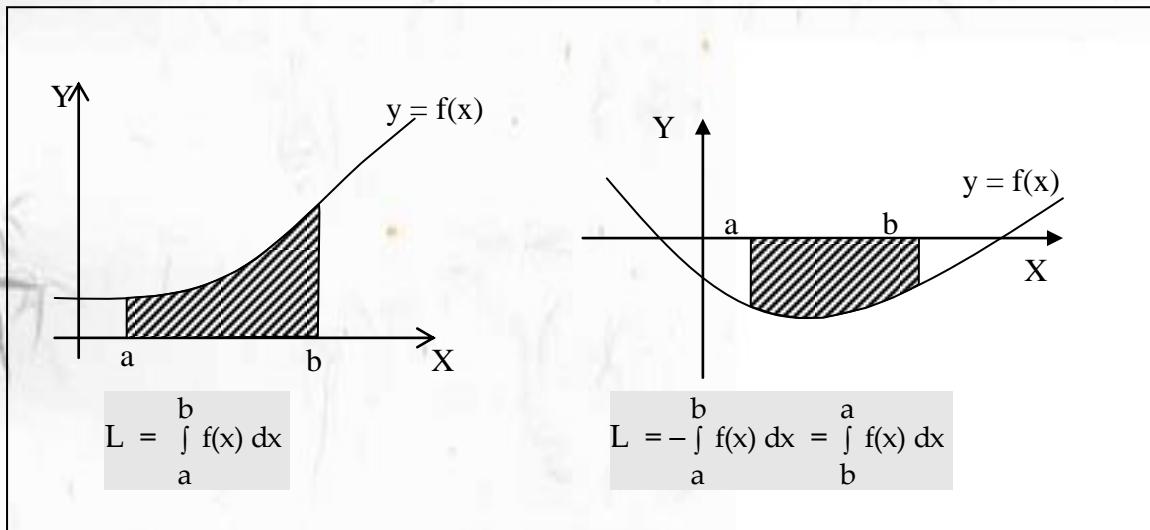


E.1. Luas Daerah Dibawah Kurva

Jadi luas daerah yang dibatasi kurva $y = f(x)$, garis $x = a$, garis $x = b$, dengan $f(x) \geq 0$, dapat dihitung dengan menggunakan rumus : $L = \int_a^b f(x) dx$

Jika grafik ada dibawah sumbu X atau $f(x) < 0$ pada selang $[a, b]$ maka luas daerah dihitung dengan rumus $L = -\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$

Lihat gambar berikut.


Contoh 1

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 3x^2 + 2x + 1$, garis $x = 1$, $x = 3$, dan sumbu X .

Jawab

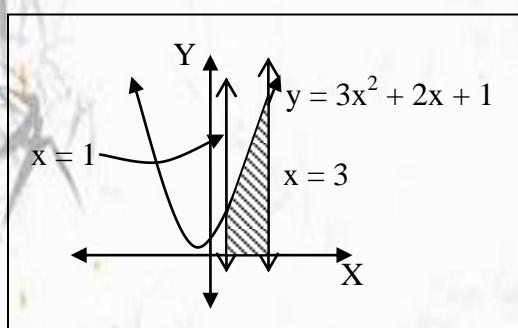
Sebaiknya dibuat dahulu sketsa grafiknya.

$a=3, b=2, c=1$, Diskriminan $D = 2^2 - 4.3.1 = 4 - 12 = -8$ (Definit positif)

$$\text{Titik puncak } \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a} \right) = \left(-\frac{2}{6}, -\frac{-8}{12} \right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

Titik potong dengan sumbu y: $(0, c) = (0, 1)$

Sketsa grafiknya :

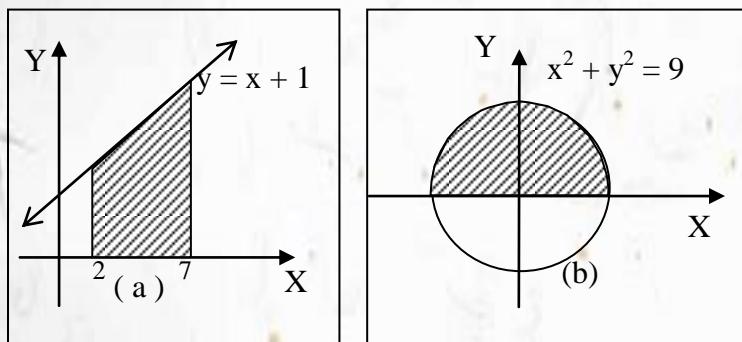


$$\begin{aligned} L &= \int_1^3 (3x^2 + 2x + 1) dx = [x^3 + x^2 + x]_1^3 \\ &= (3^3 + 3^2 + 3) - (1^3 + 1^2 + 1) \\ &= (27 + 9 + 3) - (3) \\ &= 36 \text{ satuan luas} \end{aligned}$$



Contoh 2

Hitung luas daerah yang diarsir pada gambar berikut :



Penyelesaian :

a. $L = \int_2^7 (x+1)dx = [\frac{1}{2}x^2 + x]_2^7 = [\frac{1}{2}(7)^2 + 7] - [\frac{1}{2}(2)^2 + 2] = [\frac{1}{2}.49 + 7] - [\frac{1}{2}.4 + 2] = 27\frac{1}{2}$
satuan luas

b. $x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow y^2 = 9 - x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{9 - x^2}$ (di atas sumbu x, $y > 0$)

Misal $x = 3 \sin t \Rightarrow dx = 3 \cos t dt$

Untuk $x = -3 \Rightarrow 3 \sin t = -3 \Leftrightarrow \sin t = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}\pi$

Untuk $x = 3 \Rightarrow 3 \sin t = 3 \Leftrightarrow \sin t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}\pi$

$9 - x^2 = 9 - 9 \sin^2 t = 9(1 - \sin^2 t) = 9 \cdot \cos^2 t$, sehingga diperoleh

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 \cdot \cos^2 t} = 3 \cos t.$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} L &= \int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 3 \cdot \cos(3 \sin t) dt = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 3 \cdot \cos^2 t dt = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 9 \cdot \frac{1}{2}(\cos 2t + 1) dt \\ &= \left[\frac{9}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2t + t \right) \right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{9}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2 \cdot \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi \right) - \frac{9}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2 \cdot (-\frac{1}{2}\pi) + (-\frac{1}{2}\pi) \right] \\ &= \frac{9}{2} \left(\frac{1}{2} \sin \pi + \frac{1}{2}\pi \right) - \frac{9}{2} \left[\frac{1}{2} \sin (-\pi) - \frac{1}{2}\pi \right] = \frac{9}{2} (0 + \frac{1}{2}\pi) - \frac{9}{2} [0 - \frac{1}{2}\pi] \\ &= \frac{9}{4}\pi + \frac{9}{4}\pi = \frac{9}{2}\pi \text{ sat luas} \end{aligned}$$

Kegiatan 8
Menentukan Luas Daerah dibawah Kurva

Gambar dan hitunglah luas daerah dengan ketentuan sebagai berikut:

1. Dibatasi kurva $y = x^2 + 1$, sumbu X, garis $x = 1$ dan $x = 3$
2. Daerah di atas sumbu x dan di bawah kurva $y = 4 - x^2$
3. Daerah di bawah sumbu x dan di atas kurva $y = x^2 - 4x + 3$
4. Daerah yang dibatasi kurva $y = \sin x$, sumbu x, $\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$
5. Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 3x^2 - 9$, $x = 0$, $y = 0$ dan $x = 1$



LATIHAN 8

Menentukan Luas Daerah dibawah kurva

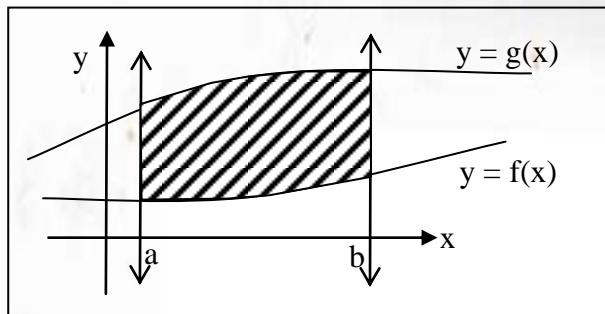
Gambar dan hitunglah luas daerah dengan ketentuan sebagai berikut:

- Dibatasi kurva $y = x^2$, sumbu-x, garis $x = 1$ dan $x = 3$
- Daerah di atas sumbu x dan di bawah kurva y

E.2. Luas Daerah Antara Dua Kurva

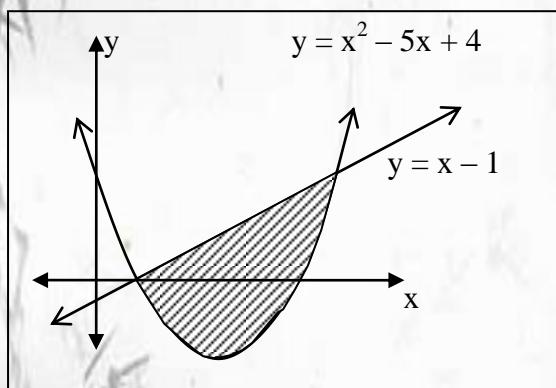
Jadi luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, $y = g(x)$, garis $x = a$ dan garis $x = b$ dimana $g(x) > f(x)$ adalah

$$L = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$



Contoh 1 :

Hitung luas daerah pada gambar berikut :



$$L = \int_1^5 (x - 1) - (x^2 - 5x + 4) dx = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) dx$$

$$L = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x \right]_1^5 = \left[-\frac{1}{3}(5)^3 + 3(5)^2 - 5.5 \right] - \left[-\frac{1}{3}(1)^3 + 3(1)^2 - 5.1 \right] \\ = 10\frac{2}{3} \text{ sat Luas}$$

Jawab

Mencari absis (x) titik potong :

$$x^2 - 5x + 4 = x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ atau } x = 5$$

Pada selang $[1, 5]$

garis $y = x - 1$ terletak di atas $y = x^2 - 5x + 4$

Contoh 2 :

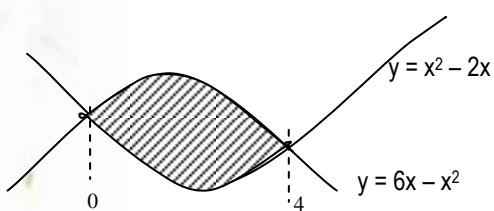
Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 6x - x^2$ dan $y = x^2 - 2x$

Penyelesaian

Absis (x) titik potong kedua kurva :

$$x^2 - 2x = 6x - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = 4$$



Pada selang $[0, 4]$ kurva $y = 6x - x^2$ terletak diatas kurva $y = x^2 - 2x$



$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^4 [(6x - x^2) - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^4 (8x - 2x^2) dx = [4x^2 - \frac{2}{3}x^3]_0^4 \\
 &= [4(4)^2 - \frac{2}{3}(4)^3] - 0 = 64 - \frac{2}{3} \cdot 64 = 21\frac{1}{3} \text{ satuan luas}
 \end{aligned}$$

Kegiatan 9

Menentukan Luas Daerah antara dua kurva

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh:

1. Parabola $y = x^2$ dan garis $y = x$.
2. Kurva $y = x^2$, garis $2x + y - 8 = 0$, sumbu x, di kuadran pertama.
3. Parabola $y = x^2$ dan $y = 4 - x^2$
4. Kurva $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ pada interval $0 \leq x \leq \pi$
5. Kurva $y = \cos 2x$ dan $y = \cos x$ pada interval $0 \leq x \leq \pi$

LATIHAN 9

Menentukan Luas Daerah antara dua kurva

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh:

1. Parabola $y = x^2$ dan garis $y = x$.
2. Kurva $y = x^2$, garis $2x + y - 8 = 0$, sumbu x, di kuadran pertama.



F. Volume Benda Putar
1. Volume benda putar mengelilingi sumbu x
Indikator

- Menghitung volume benda putar.

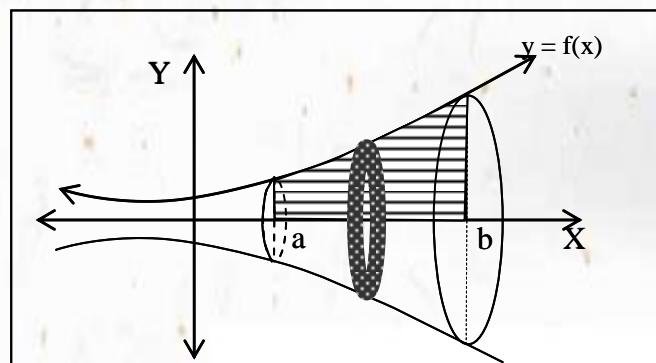
Jika daerah yang dibatasi oleh

kurva $y = f(x)$, sumbu x, garis $x = a$ dan $x = b$ diputar mengelilingi sumbu x

Daerah yang diarsir dibagi menjadi n persegi panjang dengan lebar Δx_i dan tingginya $f(x_i)$ sehingga

terbentuk tabung-tabung kecil dengan jari-jari $f(x_i)$ tinggi tabung Δx_i volume tabung

$$V = \pi [f(x_i)]^2 \Delta x_i$$



Volume seluruhnya

$$V = \sum_{i=1}^n \pi [f(x_i)]^2 \Delta x_i$$

Volume benda putar yang terjadi bisa ditentukan dengan membuat Δx_i sekecil mungkin, sedemikian sehingga $\Delta x_i \rightarrow 0$

$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^b \pi [f(x)]^2 \Delta x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

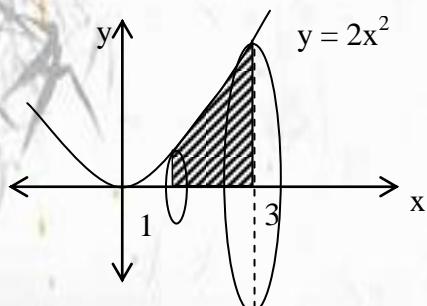
Jadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu x, garis $x = a$ dan $x = b$, bila diputar mengelilingi sumbu x akan membentuk benda putar dengan volumenya adalah

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Contoh 1.

Tentukan Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 2x^2$, sumbu x, garis $x = 1$ dan garis $x = 3$.

Penyelesaian :

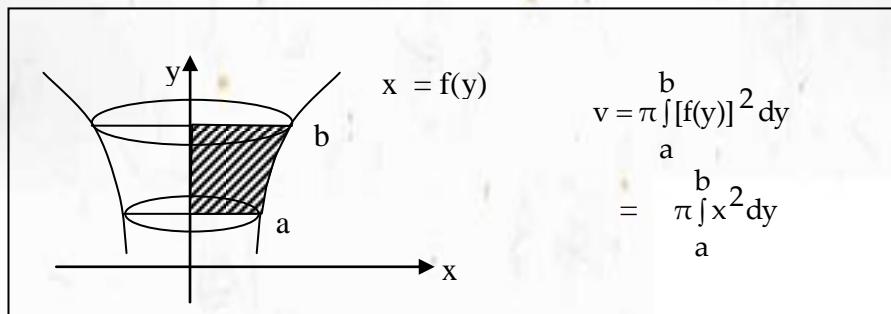


$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 [2x^2]^2 dx \\ &= \pi \int_1^3 4x^4 dx \\ &= \pi \left[\frac{4}{5}x^5 \right]_1^3 = \frac{4}{5}\pi [3^5 - 1^5] = \frac{4}{5}\pi (243 - 1) \\ &= 193 \frac{3}{5}\pi \text{ sat.vol.} \end{aligned}$$



Kegiatan 10
Menentukan Volume Benda Putar
2. Volume benda putar yang mengelilingi sumbu y

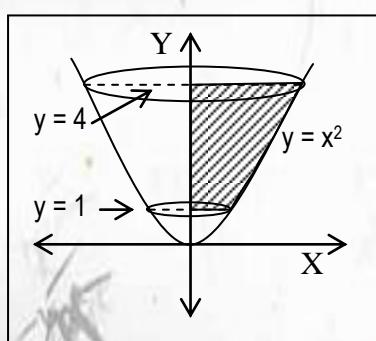
Jika daerah yang dibatasi oleh kurva $x = f(y)$, $y = a$, dan $y = b$ diputar mengelilingi sumbu y satu putaran penuh 360° , maka akan membentuk benda putar, dengan volumnya adalah $V = \pi \int_a^b x^2 dy$


Contoh :

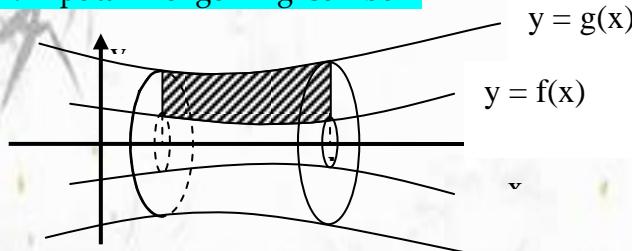
Tentukan volume benda putar jika daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$, sumbu y, garis $y = 1$ dan garis $y = 4$ diputar mengelilingi sumbu y sejauh 360° .

Penyelesaian :

$$y = x^2 \Leftrightarrow x^2 = y$$



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^4 x^2 dy = \pi \int_1^4 y dy \\ V &= \pi \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_1^4 \\ V &= \pi [\frac{1}{2} (4)^2 - \frac{1}{2} (1)^2] \\ V &= \pi [8 - \frac{1}{2}] \\ V &= \frac{15}{2} \pi \text{ Satuan volum} \end{aligned}$$

Kegiatan 10a
Menentukan Volume Benda Putar
2. Volume benda putar daerah bidang antara dua kurva
1. Diputar mengelilingi sumbu x


Daerah bidang yang diarsir pada gambar di atas yaitu yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ dan $x = b$. Jika diputar 360° mengelilingi sumbu x maka akan diperoleh benda putar.

Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ dan $x = b$. Jika diputar 360° mengelilingi sumbu x adalah :

$$V = V_2 - V_1 = \pi \int_a^b [g(x)]^2 dx - \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b \{[g(x)]^2 - [f(x)]^2\} dx$$

$$V = \pi \int_a^b \{[g(x)]^2 - [f(x)]^2\} dx$$

2. Diputar mengelilingi sumbu y

Jika daerah yang dibatasi oleh $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = a$ dan $y = b$ diputar 360° mengelilingi sumbu y, volume benda putar yang terjadi dapat dihitung dengan rumus

$$V = \pi \int_a^b [g^2(y) - f^2(y)] dy$$

Contoh

Hitunglah volume benda putar jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4 - x^2$, $y = 4 - 2x$ diputar 360° , mengelilingi :

- a. Sumbu X
- b. Sumbu Y

Jawab

Titik potong kurva : $y = 4 - 2x$, $y = 4 - x^2$

$$\Rightarrow 4 - 2x = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ atau } x = 2$$

Untuk $x = 0 \Rightarrow y = 4$ titik potong $(0,4)$ untuk $x = 2 \Rightarrow y = 0$ titik potong $(2,0)$

- a. Diputar mengelilingi sumbu x

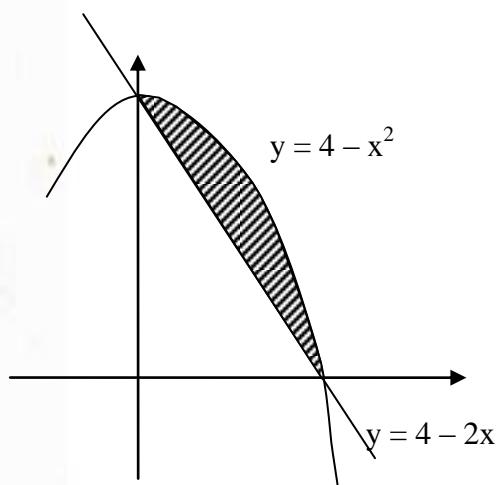
$$V = \pi \int_0^2 [(4 - x^2)^2 - (4 - 2x)^2] dx$$

$$= \pi \int_0^2 [(16 - 8x^2 + x^4) - (16 - 16x + 4x^2)] dx$$

$$= \pi \int_0^2 [16x - 8x^2 + x^4] dx = \pi [8x^2 - 4x^3 + \frac{1}{5}x^5]_0^2$$

$$= \pi [8(2)^2 - 4(2)^3 + \frac{1}{5}(2)^5] - (0)$$

$$= \pi [32 - 32 + \frac{1}{5}(32)] = 6\frac{2}{5}\pi \text{ sat.isi}$$



- b. Diputar mengelilingi sumbu y

$$y = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - y, \quad y = 4 - 2x \Rightarrow x = 2 - \frac{1}{2}y$$

batasnya $0 \leq y \leq 4$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 (4-y) - (2 - \frac{1}{2}y)^2 dy \\ &= \pi \int_0^4 [(4-y) - (4 - 2y + \frac{1}{4}y^2)] dy = \pi \int_0^4 [y - \frac{1}{4}y^2] dy = \pi \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{12}y^3 \right] = \\ &= \pi \left[(\frac{1}{2}(4)^2 - \frac{1}{12}(4)^3) - (0) \right] = \pi (8 - \frac{64}{12}) = 2\frac{2}{3}\pi \text{ sat. Isi} \end{aligned}$$

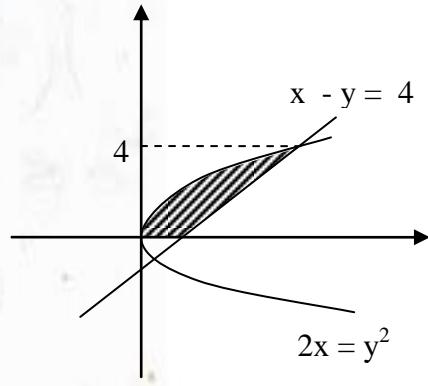
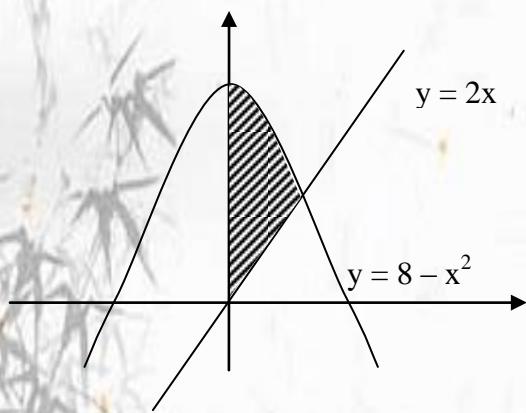
Kegiatan 10b

Menentukan Volume Benda Putar

LATIHAN 10

Menentukan Volume Benda Putar

1. Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang diarsir diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360°



2. Hitunglah volume benda putar yang terjadi, jika daerah yang terletak di kuadran pertama dan dibatasi oleh $y = x^2$, $y = 4$, dan sumbu y diputar satu kali putaran mengelilingi sumbu y.
3. Hitunglah volume benda putar yang terjadi, jika daerah yang terletak di kuadran pertama dan dibatasi oleh $y = \sin x$, $x = \frac{5}{6}\pi$ dan sumbu y diputar satu kali putaran mengelilingi sumbu x.



4. Hitunglah volume benda putar yang terjadi, jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 2$ dan $y = 3x - 2$ diputar satu kali putaran mengelilingi sumbu y.
5. Hitunglah volume benda putar yang terjadi, jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 4x + 3$ dan $y = -x^2 + 6x - 5$ diputar satu kali putaran mengelilingi sumbu x.

❖ Uji kemampuan



1. $\int (2x^2+4)(2x-3) dx = \dots$

- A. $x^4+2x^3+4x^2+12x+c$ C. $x^4-2x^3+4x^2+12x+c$ E. $x^4-2x^3-4x^2-12x+c$
 B. $x^4+2x^3+4x^2-12x+c$ D. $x^4-2x^3+4x^2-12x+c$

2. $\int_{-3}^2 4x(5x^2 - 1)dx = \dots$

- A. -1 B. -2 C. -3 D. -4 E. -5

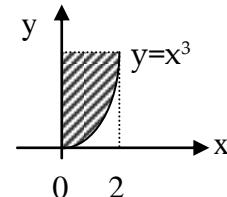
3. Gradien garis singgung suatu kurva di titik (x,y) ditentukan oleh $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x$.

Jika kurva melalui $(1,6)$ maka persamaan kurvanya adalah

- A. $y = x^3 + x^2 + 4$ C. $y = x^3 + x^2 - 4$ E. $y = x^3 + x^2 + 6$
 B. $y = x^3 + x^2 + 8$ D. $y = x^3 + x^2 - 8$

4. Luas daerah yang diarsir pada gambar di samping adalah

- A. 4 C. 12 E. 16
 B. 8 D. 12,5

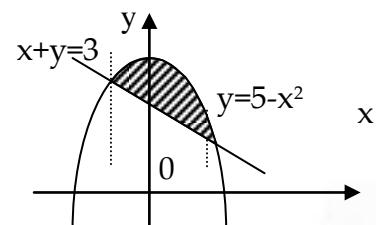


5. Luas daerah yang diarsir pada gambar di samping adalah

- A. $8\frac{1}{2}$ D. $5\frac{1}{2}$
 B. $7\frac{1}{2}$ E. $4\frac{1}{2}$
 C. $6\frac{1}{2}$

6. $\int_1^4 (7-x)dx = \dots$

- A. 11 B. 12,5 C. 13,5 D. 14 E. 15,5

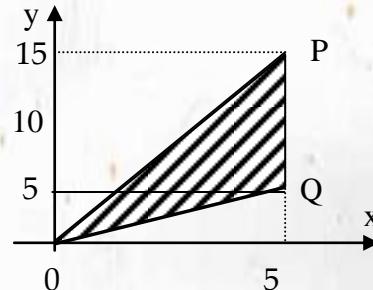


7. $\int_0^a 6x^2 dx = 126$ akan benar untuk $a = \dots$

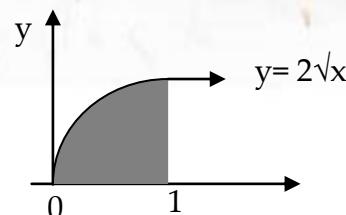
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

8. Luas daerah yang dibatasi oleh $y=x$, $x=2$ dan sumbu x adalah
 A. 2 B. 4 C. 6 D. 8 E. 9

9. Luas daerah segitiga POQ adalah ...
 A. 5 D. 20
 B. 10 E. 25
 C. 15



- 10 Daerah yang diarsir diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360° volumenya adalah
 A. 2π
 B. 4π
 C. 6π
 D. 8π
 E. 10π



11. Daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva $y^2 = x$ dan $y = x^2$ diputar 360° mengelilingi sumbu Y. Volume benda putar yang terjadi adalah
 A. $\frac{21}{30}\pi$ sat. isi C. $\frac{16}{30}\pi$ sat. isi E. $\frac{4}{30}\pi$ sat. isi
 B. $\frac{18}{30}\pi$ sat. isi D. $\frac{9}{30}\pi$ sat. isi

12. Hasil dari $\int 3x \cos 2x dx = \dots$
 A. $3x \sin 2x + 3 \cos 2x + C$ D. $\frac{3}{2}x \sin 2x + \frac{3}{4} \cos 2x + C$
 B. $3x \sin 2x + \cos 2x + C$ E. $\frac{3}{2}x \sin 2x - \frac{3}{4} \cos 2x + C$
 C. $-\frac{3}{2}x \sin 2x - \frac{3}{4} \cos 2x + C$

13. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$ dan $y = \sqrt{x}$ adalah....
 A. $\frac{1}{4}$ sat. luas C. $\frac{5}{6}$ sat. luas E. $\frac{5}{4}$ sat. luas
 B. $\frac{5}{12}$ sat. luas D. $\frac{11}{12}$ sat. luas

14. Nilai $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x - \pi) \sin(3x - \pi) dx = \dots$
 A. $-\frac{1}{6}$ B. $-\frac{1}{12}$ C. 0 D. $\frac{1}{12}$ E. $\frac{1}{6}$

15. Hasil dari $\int 2x^3 \sqrt[3]{6x-1} dx = \dots$
 A. $-\frac{1}{56}(8x+1)(6x-1)^{\frac{4}{3}} + C$ C. $\frac{1}{56}(8x+1)(6x-1)^{\frac{4}{3}} + C$ E. $\frac{3}{14}(x+3)(6x-1)^{\frac{4}{3}} + C$
 B. $-\frac{3}{14}(11x-1)(6x-1)^{\frac{4}{3}} + C$ D. $\frac{1}{56}(25x+1)(6x-1)^{\frac{4}{3}} + C$

16. Hasil dari $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x \sin^2 x) dx = \dots$



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}\pi$ D. $\frac{1}{2}\pi$ E. π

17. $\int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx = \dots$

- A. $\sin x^2 + c$ B. $\cos x + c$ C. $\sin \frac{1}{x} + c$ D. $\cos \frac{1}{x} + c$ E. $\cos x^2 + c$

18. $\int x^2 \cos x dx = \dots$

- A. $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \cdot \sin x + c$
 B. $x^2 \sin x - 2x \cos x - 2 \cdot \sin x + c$
 C. $x^2 \sin x - x \cos x + 2 \cdot \sin x + c$
 D. $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \cdot \sin x + c$
 E. $x^2 \sin x - x \cos x - 2 \cdot \sin x + c$

19. Hasil dari $\int_{-1}^1 x^2(x-6) dx = \dots$

- A. -4 B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. $\frac{1}{2}$ E. $4\frac{1}{2}$

20. Luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = 8 - x^2$ dan garis $y = 2x$ adalah

- A. -36 sat.luas C. $41\frac{2}{3}$ sat.luas E. $46\frac{2}{3}$ sat.luas
 B. $41\frac{1}{3}$ sat.luas D. 46 sat.luas

SOAL URAIAN

1. Hitung integral berikut :

a. $\int \frac{x+2}{(x^2+4x-5)} dx$ b. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ c. $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx$

2. Hitung nilai integral berikut

a. $\int_0^1 (4x^3 + 2x) dx$ b. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - 4 \sin^2 x) dx$ c. $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx$

3. Tentukan nilai x , jika $f(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 6s^2 ds$, dan $f'(x) = 18$

4. a. Gambar dan arsirlah daerah yang dibatasi oleh $y=1+x^2$ dan $y=9-x^2$
 b. Hitunglah luas daerah yang diarsir tersebut
 c. Hitung volume benda putar , jika daerah yang diarsir diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360°
5. Hitung volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi $x^2+y^2=16$ Sumbu y, garis $y=1$ dan $y=3$ yang terletak dikuadran pertama diputar mengelilingi sumbu y sejauh 360°